Khôlle n°21 (A)

Question de cours : Inégalité de Markov : énoncé et démonstration.

Exercice 1 :

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages avec remise. On arrête les tirages lorsque le dernier numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro obtenu au précédent tirage. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de tirages effectués.

1) Déterminer les valeurs prises par X.
2) Déterminer $P(X\geq 2)$; $P(X\geq 3)$ et $P(X=2)$.
3) Pour tout $k \in X(\Omega)$, déterminer $P(X\geq k)$. En déduire $P(X=k)$.
4) Calculer E(X).

Exercice 2 :

Soit $n \leq N$. On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. On tire simultanément n de ces boules. Soit k un entier tel que $0< k \leq N$.

1. Soit p_k la probabilité que tous les numéros tirés soient inférieurs à k. Déterminer p_k.
2. Soit q_k la probabilité que le plus grand des numéros tirés soit égal à k. Déterminer q_k
3. En déduire que $\sum_{k=n}^{N} \binom{k-1}{n-1} = \binom{N}{n}$

Exercice 3

Soit X la variable aléatoire définie sur {-1 ; 0 ;1} par $P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}$ et soit $Y = X^2$.

1) Calculer cov(X,Y).
2) X et Y sont-elles indépendantes ?

Corrigé khôlle n°21 (A)

Exercice 1 :

1) Il faut au moins 2 tirages et au maximum n+1 si on a obtenu la suite strictement décroissante n, n-1, …, 3, 2, 1 aux n premiers tirages.

2) $P(X\geq 2) = 1$ d'après la question précédente

$P(X\geq 3) = \frac{\binom{n}{2}}{n^2}$ car il y a $\binom{n}{2}$ couples (i ; j) avec i>j pour ne pas s'arrêter à 2 tirages;

$P(X=2) = P(X\geq 2) - P(X\geq 3) = 1 - \frac{\binom{n}{2}}{n^2} = 1 - \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$

3) Plus généralement, $P(X\geq k) = \frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}}$ et $P(X=k) = P(X\geq k) - P(X\geq k+1)$

4) $E(X) = \sum_{k=2}^{n+1} k\left(\frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k}\right) = \sum_{k=1}^{n}(k+1)\frac{\binom{n}{k}}{n^k} - \sum_{k=2}^{n+1} k\frac{\binom{n}{k}}{n^k}$

$$= \sum_{k=2}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{n^k} + 2 = \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{n^k}1^{n-k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 2 :

(a) Pour que tous les numéros tirés soient inférieurs ou égaux à k, il faut et il suffit de tirer les n numéros dans l'ensemble $[\![1,k]\!]$avec $n \leq k$. Nous avons $\Omega = \mathcal{P}_n(U)$ où U est l'ensemble de toutes les boules de l'urne. Comme les boules sont tirées au hasard, Ω sera muni de la probabilité uniforme. Ainsi :

$$\forall k \in [\![1,N]\!], \quad p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\binom{N}{n}}\binom{k}{n} & \text{si} \quad 0 \leq n \leq k \\ 0 & \text{si} \quad n > k \end{cases}$$

(b) Cette fois-ci les $n-1$ numéros doivent être pris dans $[\![1,k-1]\!]$ et l'on complètera avec le numéro k. Ainsi :

$$\forall k \in [\![1,N]\!], \quad q_k = \begin{cases} \dfrac{1\times\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} & \text{si} \quad 1 \leq n \leq k \\ 0 & \text{si} \quad n > k \text{ ou } n = 0 \end{cases}$$

NB : la différence entre les deux questions est que dans la première question le plus grand des numéros n'est pas obligatoirement k.

(c) Introduisons pour tout entier k de $[\![n,N]\!]$, E_k l'ensemble de tous les tirages tels que le plus grand des numéros soit égal à k. Et soit E l'ensemble de tous les tirages possibles de n boules prises simultanément parmi N, c'est tout simplement l'univers Ω. Il est clair que la famille $(E_k)_{k\in[\![n,N]\!]}$ constitue une partition de E et $E = \biguplus_{k=n}^{N} E_k$ d'où :

$$\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$$

d'où :

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{\binom{N}{n}}\binom{k-1}{n-1} = 1$$

Exercice 3 :

1) On sait que P(X= 0) = 1 – P(X=-1) – P(X = 1) = $\frac{1}{2}$, donc E(X) = 0
   et que $Y(\Omega) = \{0; 1\}$ avec P(Y = 0) = P(X = 0) = $\frac{1}{2}$ donc P(Y=1)= $\frac{1}{2}$ et E(Y) = $\frac{1}{2}$.
   On a la loi du couple :

Y \ X	-1	0	1	Loi de Y
0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Loi de X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

   Cov(X,Y) = E((X-E(X)(Y-E(Y)) = $\frac{1}{4}(-1-0)(1-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(0-0)(0-\frac{1}{2})+\frac{1}{4}(1-0)(1-\frac{1}{2})$
   $= \frac{-1}{8} + 0 + \frac{1}{8} = 0$

2) Pourtant les variables X et Y ne sont pas indépendantes. Cela se voit à la position des 0 dans la table de la loi conjointe : P(X= $0 \cap Y = 1) = 0 \neq P(X = 0) \times P(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Khôlle n°21 (B)

Question de cours : Formule de Koenig Huygens : énoncé et démonstration

Exercice 1 Deux personnes A et B jouent au jeu suivant : A lance une pièce équilibrée, s'il obtient pile il gagne. Sinon, B lance la pièce à son tour. S'il obtient face il gagne. Sinon, c'est de nouveau à A de jouer.... On note A_k (resp. B_k) l'événement « le joueur A (resp. B) gagne à son k-ième lancer ». On suppose que le jeu s'arrête après 10 lancers (5 de chaque joueurs). Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Le joueur A gagne en lançant au plus trois fois la pièce.
2. Le joueur B gagne.
3. Personne ne gagne.
4. On suppose que quelqu'un gagne, quel est la probabilité que cela soit A ?

Exercice 2
Une urne contient initialement deux boules blanches et deux boules noires.
Soit c un entier naturel. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :

- On tire au hasard une première boule. Si elle est blanche on s'arrête. Si elle est noire, on remet la boule noire dans l'urne. Puis on ajoute encore c boules noires dans l'urne.
- On recommence ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche, ou indéfiniment si l'on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout entier naturel non nul, on note E_n l'événement : « les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires ».
Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage auquel on a obtenu une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche, et égale à 0 sinon.

1. Quelle est la loi de X dans le cas $c = 0$?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(E_n)$ à l'aide d'un produit.
3. On suppose dans cette question que l'on a $c = 1$.
   (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel non nul n.
   En déduire la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$.
   (b) Déterminer deux réels α et β vérifiant, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{\alpha}{n+1} - \frac{\beta}{n+2}$.
   En étudiant la série $\sum(n+3)\mathbb{P}(X = n)$, démontrer que la variable aléatoire X admet une espérance et la calculer.
4. On suppose dans cette question que l'on a $c = 2$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel non nul n. En déduire la valeur de la probabilité $\mathbb{P}(X = 0)$.
   (b) Donner la loi de X. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

Exercice 3 :

Des variables aléatoires définies sur **N** sont dites échangeables si quelque soit $(i, j) \in N^2$;

$$P\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = P((X = j) \cap (Y = i)).$$

1) Montrer que si X et Y sont indépendantes et de même loi alors elles sont échangeables.
2) Montrer que si X et Y sont échangeables alors elles ont la même loi.

Corrigé khôlle n°21 (B)

Exercice 1 :

1) Par incompatibilité, $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$

$$= \frac{1}{2} + P(F_1 \cup P_2 \cup P_3) + P(F_1 \cup P_2 \cup F_3 \cup P_4 \cup P_5)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2}\frac{1-(\frac{1}{4})^3}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{64}\right) = \frac{21}{32}$$

2) De même $P(B) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{2^2}\frac{1-(\frac{1}{4})^5}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{1024}\right) = \frac{341}{1024}$

3) « Personne ne gagne » est l'événement contraire de « A ou B gagne ». La probabilité est donc $1 - \frac{1}{2}\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{1024}\right) - \frac{341}{1024} = 1 - \frac{341}{512} - \frac{341}{1024} = \frac{1}{1024}$

4) Notons G l'événement « il y a un gagnant ».

$P_G(A) = \frac{P(A\cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{341}{512}}{\frac{1023}{1024}} = \frac{2}{3}$.

Exercice 2 :

1 . Si c = 0 alors pour tout entier naturel i non nul on a : $P(X = i) = \frac{1}{2^{i-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^i}$ (loi du premier succès donc loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, cf chapitre 16)

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $P(E_n) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(N_3) \times \ldots \times P_{N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{n-1}}(N_n)$

$$= \frac{2}{4} \times \frac{2+c}{4+c} \times \frac{2+2c}{4+2c} \times \ldots \times \frac{2+(n-1)c}{4+(n-1)c} = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2+kc}{4+kc}$$

3. a) Si c = 1 alors pour tout entier n non nul on a $P(E_n) = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2+k}{4+k} = \frac{1}{2}\frac{(n+1)!}{2}\frac{4!}{(n+3)!} = \frac{6}{(n+3)(n+2)}$

Les événements E_n forment une suite croissante donc $P(X= 0) = \lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0$, le jeu s'arrête presque sûrement.

b) $\frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n+2} = \frac{\alpha(n+2)+\beta(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ si et seulement si $\begin{cases} \alpha = -\beta \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha = 1 \end{cases}$

Donc $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

Pour tout entier n non nul on a X = n si on a $E_{n-1} \cap \overline{E_n}$ donc

$P(X = n) = P(E_{n-1})\, P_{E_{n-1}}(B_n) = \frac{6}{(n+2)(n+1)}\frac{2}{4+(n-1)} = \frac{12}{(n+2)(n+1)(n+3)}$

La série de terme général $(n+3)P(X= n) = \frac{12}{(n+2)(n+1)}$ est convergente en comparaison à une série de Riemann convergente et pour tout entier N on a :

$$\sum_{n=0}^{N}(n+3)P(X=n) = 12\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = 12(1-\frac{1}{N+2})$$

D'autre part E(X) = $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N}(n+3)P(X=n) - \sum_{n=0}^{N} 3P(X=n) = 12-3 = 9.$

4. a) Si c = 2 alors pour tout entier n non nul on a P(E_n) = $\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2+2k}{4+2k} = \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1+k}{2+k} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$

Les événements E_n forment une suite croissante donc P(X= 0) = $\lim\limits_{n\to+\infty} P(E_n)$ = 0, le jeu s'arrête presque sûrement.

b) Pour tout entier n non nul on a X = n si on a $E_{n-1} \cap \overline{E_n}$ donc

P(X = n) = P(E_{n-1}) $P_{E_{n-1}}(B_n) = \frac{1}{n}\frac{2}{4+(n-1)} = \frac{1}{n(n+3)}$.

La série de terme général nP(X= n)= $\frac{1}{n+3}$ est divergente en comparaison à une série de Riemann divergente donc X n'admet pas d'espérance.

<u>Exercice 3 :</u>

1) $Soit\ (i,j) \in \mathbb{N}^2$;
$P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = P(X=i)P(Y=j)$ =P (Y=i) P (X = j) = $P\big((Y=i)\cap(X=j)\big)$
2) Soit i ∈ ℕ; *avec la formule des probabilités totales*,
P(X = i) = $\sum_{j\in\mathbb{N}} P(X=i\ \cap Y=j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} P(X=j\ \cap Y=i) = P(Y=i)$
Donc X et Y ont la même loi.

Khôlle n°21 (C)

Question de cours : propriété quadratique de la variance : énoncé et démonstration

Exercice 1 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. Un joueur effectue des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à ce que le numéro tiré ait un numéro supérieur au numéro tiré juste avant ou que l'urne soit vide (par exemple, une suite de tirages possible est $8, 4, 5$, on s'arrête alors après ce troisième tirage). Si l'urne devient vide sans que le joueur n'ait jamais tiré un numéro plus grand que le précédent, il ne gagne pas d'argent. Sinon, il gagne k euros où k est le nombre de tirage qu'il a effectués. On note X_n le gain du joueur.

1. Quelles sont les valeurs prises par X_n ?
2. Calculer $P(X_n = 0)$.
3. Déterminer $P(X_n = 2)$ (on pourra utiliser un argument de symétrie).
4. Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a $P(X_n = n) = \frac{n-1}{n!}$.
5. Justifier que pour $n \geq k \geq 2$, on a $P(X_n = k) = P(X_k = k)$. En déduire la loi de X_n.

Exercice 2 :

Si elle existe, montrer que l'espérance d'une variable aléatoire X à support contenu dans ℕ est égale à

$$\sum_{n \geq 0} P(X > n)$$

Exercice 3 :

On considère deux urnes U_1 et U_2.

On suppose que U_i contient n_i boules noires et b_i boules blanches, $1 \leq i \leq 2$.

On choisit de façon équiprobable une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs avec remise. Soit N_j l'événement « tirer une boule noire au j-ième tirage ».

1) Calculer $P(N_j)$, $1 \leq j \leq 2$.
2) Quelle est la probabilité de tirer une boule noire au second tirage sachant que l'on a tiré une boule noire au premier tirage.
3) Les événements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ?

Corrigé khôlle n°21 (C)

Exercice 1 :

1. X_n peut prendre n valeurs : c'est soit un nombre entier compris entre 2 et n, soit 0.
2. X_n = 0 si les numéros tirés forment une suite strictement décroissante, il n'y a qu'une possibilité, c'est de tirer n, n-1, n-2, …., 2 puis 1. Et il y a n ! tirages possibles ainsi P(X_n = 0) = $\frac{1}{n!}$
3. Pour que $X_n = 2$, il faut qu'on ait obtenu aux deux premiers tirages un couple (i ; j) avec i<j. Il y a donc $\binom{n}{2}$ tirages favorables. Ainsi P(X_n = 2) = $\frac{\binom{n}{2}}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$
4. Soit n≥ 3. Pour que $X_n \geq$ n, il faut qu'on ait obtenu aux $n-1$ premiers tirages une suite strictement décroissante, il y a $\binom{n}{n-1} = 1$ tirage favorable ainsi :

   P(X_n = n) = P(X_n ≥ n) - P(X_n = 0) = $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n-1}{n!}$
5. Pour $2 \leq k \leq n$, . Pour que $X_n \geq$ k, il faut qu'on ait obtenu aux $k-1$ premiers tirages une suite strictement décroissante. On a donc :

   $$P(X_n = k) = P(X_n \geq k) - P(X_n \geq k+1) = \frac{\binom{n}{k-1}}{n(n-1)\dots(n-k)} - \frac{\binom{n}{k}}{n(n-1)\dots(n-k+1)} =$$
   $$\frac{n!}{n(n-1)\dots(n-k)(k-1)!(n-k+1)!} - \frac{n!}{n(n-1)\dots(n-k+1)k!(n-k)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{k-1}{k!} = P(X_k = k)$$

Exercice 2: (cf exercice 10 du TD 15)

Soit N ∈ ℕ*. On sait que E(X) = $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} k\,P(X=k) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} k(\,P(X\geq k) - P(X \geq k+1))$

$= \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} k(\,P(X > k-1) - P(X>k))$

$= \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} k\,P(X > k-1) - \sum_{k=1}^{N} kP(X>k)$

$= \lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\,P(X > k) - \sum_{k=1}^{N} kP(X>k)$

$= \lim\limits_{N\to+\infty}$ P(X>0)+ $\sum_{k=1}^{N-1} P(X>k)$ – N P(X>N)

Or X admet une espérance donc la suite (N P(X>N)) converge vers 0 et on a le résultat attendu.

Exercice 3 :

1/ Avec la formule des probabilités totales, les événements U_1 et U_2 formant un sce on a :

$P(N_1) = P(U_1 \cap N_1) + P(U_2 \cap N_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}\right)$

Et $P(N_2) = P(U_1 \cap N_2) + P(U_2 \cap N_2) = P(N_1)$ car les tirages s'effectuent avec remise.

2/ $P_{N_1}(N_2) = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_1)} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_1+b_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_2+b_2}\right)^2}{\frac{n_1}{n_1+b_1} + \frac{n_2}{n_2+b_2}}$

3/ Les événements N_1 et N_2 ne sont pas indépendants d'après le calcul précédent car $P_{N_1}(N_2) \neq P(N_2)$

(sauf si $\frac{n_1}{b_1} = \frac{n_2}{b_2}$).