Khôlle n°17

Question de cours

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors (u_n) converge vers cette limite.

Exercice 0

Déterminer u_n en fonction de n pour la suite

$$(u_n) \text{ définie par : } \begin{cases} u_0 = 5, \ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Exercice 1

On considère la fonction g définie sur]0 ;+∞[par $g(x) = \frac{2}{x} + \ln(x)$

1) Dresser le tableau de variations de g en précisant les limites aux bornes .
2) Justifier que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution $\propto$ sur]0 ;+∞[.
3) a) Montrer que $|g'(x)| \leq \frac{2}{9}$ pour $x \in I = [\frac{3}{2}; 2]$. Quelle inégalité peut-on en déduire ?

   b) Montrer que I est stable par g.

   c) La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ est donc bien définie. Montrer qu'elle converge vers $\propto$.

Exercice 2 :

Si (u_n) est une suite croissante de premier terme strictement positif, que peut-on dire de la série de terme général u_n ?

Exercice 3

Étudier les limites de

$$u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} \quad \text{et} \quad v_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$