Khôlle n°16

Question de cours

Si H est un sev de $\mathbb{R}^n$ alors $f^{-1}(H)$ est un sev de $\mathbb{R}^p$

Exercice 1

Justifier que (1, X+1, $(X+1)^2$) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Trouver les coordonnées de $X^2 + X$ dans cette base.

Exercice 2

Soit B= (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de $\mathbb{R}^4$. On définit $f \in L(\mathbb{R}^4)$ par $\forall k \in [|1\,;4|]$ $f(e_k) = e_k + \sum_{i=1}^{4} e_i$

1. Donner A, la matrice de f dans la base B.
2. Trouver une relation entre A, A^2 et I_4.
3. En déduire une expression de A^r en fonction de A, I_4 et r pour tout entier naturel r.

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer pour $0 \leq i \leq 3$, $f(x^i)$.
2. En déduire une base de Ker(f) et une base de Im(f) sans calcul.

Exercice 4

Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.