Khôlle n°15

Question de cours

Dans $M_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont supplémentaires.

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

On pose $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,-1,1)$ et $u_3 = (0,-1,2)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 2

Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par $U(P) = P + (1-X)P'$

Soit $\beta = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de u dans β.
3. Déterminer le noyau et l'image de u.

Exercice 3

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels.

On note $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F.
2. Soit $G = Vect(I_2)$. Montrer que $E = F \oplus G$.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in E$.
   Décomposer M dans la somme directe $E = F \oplus G$.