Khôlle n°15

Question de cours

Pour $f \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, si G est un sev de $\mathbb{R}^p$ alors $f(G)$ est un sev de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1

Montrer que $(1, 1+X, 1+X+3X^2)$ *est une famille génératrice de* $\mathbb{R}_2[X]$.

Justifier que c'est une base et déterminer les coordonnées de X^2+X dans cette base.

Exercice 2

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Si oui en donner une base.

$E_4 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ M^2 = 0\}$
$E_5 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \ / \ P(1) = 1\}$
$E_6 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \ / \ P(0) = 0\}$

Exercice 3

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \ f(P) = (X-1)P'(X) + (X-1)^2 P''(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. En déduire le rang de f, $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$.
   L'application f est-elle bijective ?
4. Soit $\mathcal{B}' = (1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$. Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$.