Khôlle n°15

Question de cours

Pour $f \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, f est injective si et seulement si $\ker f = \{0\}$

Exercice 1

Soit $\mathbb{R}_2[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2, a_i \in \mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? On considère l'application

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto (X+1)P'$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que la matrice A de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que $\mathcal{B}' = (1, X+1, (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Trouver la matrice B de f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'$.

Exercice 2

Les familles suivantes sont-elles libres ?

Dans $\mathbb{R}_2[X]$:

$$P_1 = 2X^2 + 1, P_2 = (1 - X)(X + 3), P_3 = 4X - 7$$

Dans $\mathbb{R}_3[X]$:

$$P_1 = X^3, P_2 = X^2(X - 2), P_3 = 3X - 2, P_4 = (X - 2)^3$$

Exercice 3

Soit E l'ensemble des suites réelles u vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+2)u_{n+2} + (n+1)u_{n+1} - u_n = 0$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Déterminer l'ensemble des suites géométriques contenues dans E.