# *Khôlle n°5 (S1)*

## ***Question de cours***

Démontrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

## ***Exercice 1***

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Quelle est l'équation de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse 0 ?
3) Montrer que $f'$ n'a pas de limite en 0.

## ***Exercice 2***

Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^-$. On pose $g(x) = f\left(-1 - \frac{1}{x}\right)$ pour $x$ réel positif non nul. Justifier que $g$ est dérivable et déterminer $g'(x)$.

## ***Exercice 3***

Pour n un entier non nul, déterminer $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x^n - 1}$

## ***Exercice 4***

Montrer que l'équation $\exp\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.

**Khôlle n°5 (S1)**

## Question de cours

Dérivée de la fonction réciproque d'une fonction bijective.

## Exercice 1

Soit $f$ la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \,\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-2x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f$ est dérivable en 0.

## Exercice 2

1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n}$.
2) Déterminer un équivalent en 0 puis en $+\infty$ de $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}}$

## Exercice 3

1) Montrer que l'équation $2cos(x)^2 = x$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$. Donnez en un encadrement.
2) En quels points la tangente à la courbe de la fonction exp est-elle parallèle à la droite (MN) pour M(-2 ;0) et N(0 ;1) ?

**_Khôlle n°5 (S2)_**

## ***Question de cours***

Démontrer que $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$

## ***Exercice 1***

Etudier les limites de la fonction suivante aux bornes de son ensemble de définition :

$$\frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-2x}}$$

## ***Exercice 2***

*On considère la fonction*

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2 - x\ln x - 2 & \text{si } x > 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

**1.** *Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.*

**2.** *Déterminer un équivalent simple de $f$ en $+\infty$.*

**3.** *Dresser le tableau de variation de $f$ en précisant la limite en $+\infty$.*

**4.** *Justifier que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle que l'on précisera.*

## ***Exercice 3***

Montrer que l'équation $2x\sin^2(x) - 3 = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$. Donnez en un encadrement.

## ***Exercice 4***

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+x}$ ; $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-\sin(x)}{\cos(x)+x}$ puis. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$

Préciser, s'il y a lieu, l'équation d'une asymptote (verticale ou horizontale).

***Khôlle n°5 (S2)***

## ***Question de cours***

Déterminer la dérivée de $x \longmapsto x^n$

## ***Exercice 1***

Étudier les limites quand $x \to +\infty$ de

$$\frac{xe^{2x}}{\ln x} \; ; \; \sqrt{x} - \ln x \; ; \; \frac{\ln(x^2+1)}{x} \; ; \; \frac{x}{e^{\sqrt{x}}} \; ; \; xe^{-x^2+x} \; ; \; \frac{x \ln x}{2^x}.$$

## ***Exercice 2***

On note $f$ la fonction définie par

$$f : \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto -3\sin^2 x + 5$$

La fonction $f$ est-elle continue ? Pourquoi ?

Quel est l'ensemble image

$$K = f\left(\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]\right)$$

Montrer qu'on peut définir une fonction

$$g : K \longrightarrow \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

qui est la réciproque de $f$.

Expliciter la formule $y = g(x)$.

Dessiner les graphes des fonctions $f$ et $g$.

## ***Exercice 3***

Soit $f$ la fonction réelle définie sur $[-1; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que $f$ est continue sur $[-1; +\infty[$.

b) Montrer que $f$ est dérivable en 0.

## *Khôlle n°5 (S2)*

### ***Question de cours***

Laissée au choix du candidat

### ***Exercice 1***

Montrer que l'équation $2xsin(x) - 3 = 0$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$. Donnez en un encadrement.

### ***Exercice 2***

Soit $f$ la fonction définie sur $]-\infty;1[\backslash\{0\}$ par
$f(x) = \frac{x}{\ln(1-x)}$. Etudier les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

### ***Exercice 3***

*On considère*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & xe^x \end{array}$$

1) Justifier que $f$ est bijective sur R+.
2) Déterminer $(f^{-1})$'.

### ***Exercice 4***

On définit la fonction $f$ par $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x}$

1° $f$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

2° Est-elle dérivable en 0?
3° Quelle est l'équation de la tangente à $C_f$ au point d'abscisse 0 ?