Khôlle n°3 (S1)

Question de cours

Donner et démontrer la formule de duplication $\cos(2x)$

Exercice 1

Sachant que $\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
donner les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{8}$, $\sin\frac{5\pi}{8}$, $\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sin\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$ et $\cos\frac{11\pi}{8}$.

Exercice 2

1° Justifier que sur [0 ;1] ; $p(1-p)\leq\frac{1}{4}$

2° Montrer que la fonction définie par $f(x)=\cos(4x+5)$ est $\frac{\pi}{2}-périodique$

Exercice 3

Donner la forme exponentielle de $(\frac{-1}{1+i\sqrt{3}})^{15}$

Exercice 4

Résoudre l'équation $\bar{z}=jz^2$ où j $=e^{\frac{2i\pi}{3}}$(on cherchera les solutions sous forme exponentielle)

Khôlle n°3 (S1)

Question de cours

1° Donner et démontrer la formule d'addition sin(a+b)

2° Application :

Résoudre l'équation $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$, *d'inconnue* $x \in [0, \pi]$.

Exercice 1

Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi[$ l'équation $2\cos^2 t + \cos t - 1 = 0$.

Exercice 2

Linéariser $(\cos x)(\sin x)^3$

Exercice 3

Donner la forme exponentielle de $(\frac{-2}{1+i})^9$

Exercice 4

Soit Z=$\frac{3-ix}{1+ix}$ où $x \in R$ montrer que |z-1| est constant

Exercice 5

1. La fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est-elle paire ? impaire ?
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right[$.

Khôlle n°3 (S1)

Question de cours

Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$

Exercice 1

1° Justifier que $arctan(3-x) + arctan\left(4-\frac{1}{x}\right) = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0$

2° En déduire les solutions de l'équations $arctan(3-x) + arctan\left(4-\frac{1}{x}\right) = \frac{3\pi}{4}$

Exercice 2

Calculer $(1+\mathrm{i})^{20}$

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

1) Justifier que f est bien définie.
2) La fonction f est-elle paire ? impaire ?
3) La courbe de f a-t-elle un centre de symétrie ?
4) Déterminer l'ensemble d'arrivée de f.
5) Étudier les variations de f.

Exercice 4

On pose $\delta^2 = -2(4+3i)$.

1° Quelles sont les valeurs possibles pour δ? On donnera les formes algébriques.

2° En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $2z^2 - (1+5i)z - 2(1-i) = 0$ (on pourra chercher la forme canonique du polynôme et on utilisera δ)

Khôlle n°3 (S2)

Question de cours

Donner et démontrer la formule de duplication $\sin(2x)$

Exercice 1

1° Montrer que pour tout réel $x, arctan(x+1) - arctan(x) = arctan\,(\frac{1}{1+x+x^2})$

2° En déduire la limite de l'expression du terme général de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\sum_{k=0}^{n} arctan\,(\frac{1}{1+k+k^2})$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$2\cos(2x+\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}; \quad \sin(x) \leqslant -\frac{1}{2}; \quad \cos(2x) \geqslant 0$$

Exercice 3

Transformer $cos(5x) \times sin\,(5x)$ avec les formules d'Euler

Exercice 4

Soient $f: x \longmapsto \sqrt{x}+1$ et $g: x \mapsto (x-1)^2$.

1) Étudier les variations de f et g.
2) Les courbes de f et g admettent-elles un axe ou un centre de symétrie ? Justifier.
3) Déterminer les expressions de fog et gof.

Khôlle n°3 (S2)

Question de cours

Donner et démontrer la formule d'addition tan(a+b)

Exercice 1

Soit $f(x) = \frac{sin\,(3x) - sin\,(2x)}{\sin\,(x)}$ pour $x \in]-\pi;\ \pi[\backslash\{0\}$

1. Montrer que $f(x) \ = 4\,cos^2(x) - 2cos(x) - 1$
2. En remarquant que $f(\frac{\pi}{5}) = 0$, déterminer une valeur de $\cos(\frac{\pi}{5})$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 = \frac{16\sqrt{2}}{1 - \mathrm{i}}$$

Indication : on travaillera sous forme exponentielle.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1) Justifier que f est bien définie.
2) La fonction f est-elle paire ? impaire ?
3) La courbe C_f a-t-elle un axe de symétrie ?
4) Déterminer l'ensemble d'arrivée de f.
5) Étudier les variations de f.

Exercice 4

Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: (1) $\quad \overline{z} = z^3$.

Khôlle n°3 (S2)

Question de cours

Donner et démontrer la formule de Moivre pour tout entier naturel n.

Exercice 1

Déterminer dans $\mathbb{C}$ les solutions de l'équation suivante : $z^4 + z^2 + 1 = 0$

Exercice 2

On considère $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \ln x$ *et* $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \mid x \mapsto \ln x + 1$.

1. *Montrer que* $x \mapsto g(f(x))$ *est définie sur* $]1, +\infty[$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.
2. *Déterminer le plus grand ensemble sur lequel on peut définir* $x \mapsto f(g(x))$.

Exercice 3

Donner la forme algébrique de $(2 + i)^6$

Exercice 4

Écrire $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sqrt{6}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ sous la forme $r\cos\left(\frac{\pi}{5} + \varphi\right)$.