***Khôlle n°19 (A)***

On rappelle que, lorsque $x$ est au voisinage de 0, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

Plus généralement, la formule de **Taylor-Young** donne que :
si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

***Exercice 1***

1. On considère la fonction tan définie sur $]\frac{-\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}[$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Quelle est sa parité ?
2. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\tan(x)$. Qu'est-ce qui justifie que les puissances de $x$ obtenues soient toutes impaires ?
3. En déduire l' équation de la tangente à la courbe de la fonction tan au voisinage de 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente.
4. On sait que la fonction tan est $C^\infty$ sur $]\frac{-\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}[$. Déterminer tan'(0) ; $tan^{(2)}(0)\ et\ tan^{(3)}(0)$.

***Exercice 2***

On considère $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

0. Quel est l'ensemble de définition de $f$ ?
1. a) Écrire le DL à l'ordre 1 en 0 de $f$ .
   b) Justifier que $f$ est prolongeable par continuité en 0.
   c) Montrer que la fonction $f$ ainsi prolongée est dérivable en 0 et déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 0.
2. Étudier les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-1^{+}$. Quelles sont les droites qui sont asymptotes à la courbe de $f$ ?
3. Étudier le signe de la fonction $f$
   $(on\ pourra\ étudier\ la\ fonction\ g\ :]-1;+\infty[\to \mathbb{R}\ définie\ par\ g(x) = \ln(1+x) - x).$
4. On admet que la fonction $f$ est strictement croissante sur son ensemble de définition. Tracer l'allure de la courbe de $f$ dans un repère.

**Khôlle n°19 (B)**

On rappelle que, lorsque $x$ est au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\
\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Plus généralement, la formule de **Taylor-Young** donne que :
si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

***Exercice 1***

Soit $f$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \; f(x) = \sqrt{4+3x}$$

Montrer que pour tout réel $x$ positif, on a :

$$|f(x) - 4| \leqslant \frac{3}{4}|x - 4|$$

***Exercice 2***

On considère la fonction $f$ définie sur $]-\infty,1[$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{si } x\in]-\infty,0[\cup]0,1[\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. (a) Montrer que $f$ est continue sur $]-\infty,1[$.
   (b) La fonction $f$ est-elle prolongeable par continuité en 1 ?
   (c) Montrer que $f$ est dérivable en 0 et que $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.
   (d) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 0.
2. (a) On pose :
   $$\forall x\in]-\infty,1[,\quad h(x)=\ln(1-x)+x.$$
   Étudier les variations de la fonction $h$ sur $]-\infty,1[$.
   En déduire le signe de $h(x)$ pour tout $x$ de $]-\infty,1[$.
   (b) Montrer que $f$ est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel $x$ élément de $]-\infty,0[$ ou $]0,1[$. En déduire que $f$ est strictement croissante sur $]-\infty,1[$.
   (c) Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variations.
3. (a) Montrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$, l'équation $f(x)=n$, d'inconnue $x\in[0,1[$, admet une unique solution notée $u_n$. Donner la valeur de $u_1$.
   (b) Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, $u_n\leqslant u_{n+1}$.

## *Khôlle n°19* (C)

On rappelle que, lorsque $x$ est au voisinage de 0, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

Plus généralement, la formule de **Taylor-Young** donne que :
si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

## ***Exercice 1***

Soit $f$ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0, +\infty[$, et que $\alpha \in ]1, 2[$.
2. A l'aide de l'Inégalité des Accroissements Finis, montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \ |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

***Exercice 2***

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2-x}{2+x}\right) \ .$$

(1) Quel est le domaine de définition naturel de $f$ ? Montrer que $f$ est continue sur ce domaine.

(2) Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son domaine.

(3) Montrer que $f$ est dérivable sur son domaine et calculer sa dérivée.

(4) En déduire une formule simplifiée pour $f$ .

**_Khôlle n°19 : Corrigé (A)_**

## _Exercice 1_

1. Soit $x \in ]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, on a tan(-$x$) = $\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$. La fonction tan est donc impaire.
2. Au voisinage de 0 on a : $\tan(x) = \frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$
$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
La fonction étant impaire, il est normal que dans la partie régulière du DL, toutes les puissances soient impaires.
3. La tangente à la courbe de la fonction tan au point d'abscisse 0 est $y = x$. Puisque $\frac{x^3}{3}$ change de signe au voisinage de 0, on sait que la courbe de la fonction tan est en dessous de sa tangente puis au-dessus (point d'inflexion).
4. D'après la formule de Taylor Young, on sait que tan'(0)=1 ; $\frac{tan^{(2)}(0)}{2!} = 0$ $et$ $\frac{tan^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{3}$.
Ainsi $tan^{(2)}(0) = 0$ $et$ $tan^{(3)}(0) = 2$.

## _Exercice 2_

0. $f$ est définie sur ]-1 ;0[∪ ]0 ;+∞[
1. a) Nous avons besoin du $DL_3(0)$ de $ln(1+x)$. On a :
$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x}{x^2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{3}x + o(x)$$
b) $f$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{-1}{2}$ car $f$ admet un $DL_0(0)$
c) La fonction ainsi prolongée est dérivable en 0 car $f$ admet un $DL_1(0)$. On a $f'(0) = \frac{1}{3}$ L'équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 0 est y = $\frac{-1}{2} + \frac{1}{3}x$
2. Au voisinage de + ∞; $f(x) \sim \frac{-x}{x^2} \sim \frac{-1}{x}$ ainsi $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à $C_f$ en +∞. Par opérations sur les limites on a $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $C_f$.
3. $f(x)$ est du signe de son numérateur $g(x)$. La fonction g est dérivable sur ]-1 ;+∞[ par opérations sur les fonctions dérivables (composition et soustraction) et on a $\forall x \in ]-1 ; +\infty[$
$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$
D'où le tableau de variations :

| $x$ | -1 | | 0 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| g'($x$) | ‖ | + | 0 | − | |
| g | ‖ | ↗ | 0 | ↘ | |
| Signe de $f(x)$ | ‖ | | − | | |

4. On prend soin de tracer la tangente en 0 et les asymptotes et de respecter les propriétés de $f$ (croissante et négative)

***Khôlle n°19 : Corrigé (B)***

## ***Exercice 1***

On reconnaît l'application de l'inégalité des accroissements finis. $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$en tant que composée de telles fonctions et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{4+3x}}$.

Par composition , $f'$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) \leq f'(0) = \frac{3}{4}$.

On remarque de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) \geq 0$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

Toutes les conditions sont réunies. En remarquant que $f(4) = 4$, on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ :

$$|f(x) - f(4)| \leq \frac{3}{4}|x-4|$$

## ***Exercice 2***

1. (a) ⋆ La fonction $f$ est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,1[$ en tant que quotient de produit de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant jamais.
   ⋆ Continuité en 0 ? Au voisinage de 0, on a :

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} = \frac{-x}{(1-x)(-x+o(x))} = \frac{-1}{(1-x)(-1+o(1))} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{-1}{1\times(-1)} = 1 = f(0)$$

   Ainsi, la fonction $f$ est également continue en 0.
   Elle est bien continue sur $]-\infty,1[$.

   (b) Au voisinage de 1, on a :

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x) = \lim_{u\to 0} u\ln(u) = 0^- \quad \text{(croissances comparées)}$$

   donc par quotient, $\lim_{x\to 1} \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} = +\infty$, donc $f$ n'admet pas de limite finie en 1, elle n'est pas prolongeable par continuité.

   (c) Écrivons (si possible) un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} = \frac{1}{1-x} \times \frac{-x}{\ln(1-x)} \\ &= (1+x+o(x)) \times \frac{-x}{-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \\ &= (1+x+o(x))\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}+o(x)}\right) \\ &= (1+x+o(x))\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right) \\ &= 1-\frac{x}{2}+x+o(x) = \boxed{1+\frac{x}{2}+o(x)} \end{aligned}$$

   Ainsi, $f$ admet bien un DL d'ordre 1 en 0, donc $f$ est dérivable et $f'(0) = 1/2$ (coefficient devant $x$).

   (d) D'après le Développement Limité, la tangente en 0 a pour équation :

$$\boxed{y = \frac{x}{2} + 1}$$

   *Remarque : on peut aussi simplement dire que c'est $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, l'énoncé donnant que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1/2$*

2. (a) La fonction $h$ est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et on a :

$$\forall x \in ]-\infty, 1[, \ h'(x) = \frac{-1}{1-x} + 1 = \frac{-1 + (1-x)}{1-x} = \frac{-x}{1-x}$$

Le signe de $h'(x)$ est donc le signe inverse de $x$. La fonction $h$ est donc strictement croissante sur $]-\infty, 0]$, puis strictement décroissante sur $[0, 1[$.
Elle admet donc son maximum en 0. Or, $h(0) = 0$, donc :

$$\boxed{\forall x \in ]-\infty, 1[, \ h(x) \leqslant 0}$$

et même :

$$\boxed{\forall x \in ]-\infty, 0[\cup]0, 1[, \ h(x) < 0}$$

(b) La fonction $f$ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ en tant que quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant jamais. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in ]-\infty, 0[\cup]0, 1[, \ f'(x) &= \frac{-1(1-x)\ln(1-x) - (-x)\left(-\ln(1-x) + (1-x)\frac{-1}{1-x}\right)}{(1-x)^2\ln^2(1-x)} \\ &= \frac{-\ln(1-x) - x}{(1-x)^2\ln^2(1-x)} = \frac{-h(x)}{x^2\ln^2(1-x)} \boxed{> 0}\end{aligned}$$

Puisque c'est vrai aussi en 0, on a : $\forall x \in ]-\infty, 1[, f'(x) > 0$. La fonction $f$ est donc strictement croissante sur $]-\infty, 1[$.

(c) On a déjà vu que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$.
On a également :

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \underset{x \to -\infty}{\sim} \frac{-x}{(-x)\ln(1-x)} = \frac{1}{\ln(1-x)} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit donc le tableau de variations de $f$ sur $]-\infty, 1[$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3. (a) La fonction $f$ est continue sur $[0, 1[$, et strictement croissante, donc réalise une bijection de $[0, 1[$ vers $f([0, 1[) = [f(0), \lim\limits_{x \to 1} f[= [1, +\infty[$.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, $n \in f([0, 1[)$, donc il existe un unique $u_n \in [0, 1[$ tel que $f(u_n) = n$.

$$f(x) = 1 \Longleftrightarrow x = 0$$

donc $u_1 = 0$.

(b) La fonction $f$ étant strictement croissante sur $[0, 1[$

$$u_n \leqslant u_{n+1} \Longleftrightarrow f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \Longleftrightarrow n \leqslant n+1 \ : \quad \text{vrai}$$

donc on a bien $\forall n \geqslant 1, u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite $(u_n)$ est donc croissante.

**Khôlle n°19 : Corrigé (C)**

**Exercice 1**

1. On reconnaît l'application du théorème de la bijection. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+{}^*$ par g($x$)=$1+\frac{1}{\sqrt{x}}-x$.
   La fonction g est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+{}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+{}^*$, on a :
   g'($x$)= $-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}-1 = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}-1<0$ donc la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+{}^*$
   $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ ; $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et $0 \in ]-\infty;+\infty[$
   donc il existe un unique réel $\alpha>0$ tel que g($\alpha$)= 0 c'est-à-dire solution de l'équation $f(x)=x$.
   Par ailleurs g$(1)=1>0$ *et* g(2)= $1+\frac{1}{\sqrt{2}}-2=\frac{\sqrt{2}}{2}-1<0$ donc $\alpha \in ]1;2[$.
2. On vérifie les hypothèses de l'inégalité des accroissements finis : $f$ est continue et dérivable sur$[1;+\infty[$ en tant que composée de telles fonctions et pour tout $x\geq 1$, $f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}}$

Par produit , $f'$ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ ainsi pour tout $x \in [1;+\infty[$ , $f'(x)\geq f'(1)=\frac{-1}{2}$.

On remarque de plus que pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ , $f'(x)\leq 0$. On a donc pour tout $x \in [1\,;+\infty[$ ,

$$|f'(x)| = -f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

Toutes les conditions sont réunies. En rappelant que $f(\alpha)=\alpha$, on a bien pour tout $x \in [1;+\infty[$ :

$$|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$$

**Exercice 2**

1. $f$ est continue sur ]-∞; $-2$[ et sur ]-2 ; $+\infty$[ en tant que quotient et composée de fonctions continues.
2. $f$ n'est pas définie en -2 il y a donc 4 limites à étudier :
   $\lim_{x\to-2^-}\frac{2-x}{2+x}=-\infty$ ainsi par composition $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-\infty} Arctan(x) = \frac{-\pi}{2}$.
   De même $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} Arctan(x) = \frac{\pi}{2} \neq \lim_{x\to-2^-} f(x)$ . $f$ n'est pas prolongeable pas continuité en -2.

   Au voisinage de l'infini : $\frac{2-x}{2+x}\sim -1$ *et* $\lim_{x\to-1} Arctan(x) = \frac{-\pi}{4}$ donc par composition
   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-\pi}{4}$
3. $f$ est dérivable sur ]-∞; $-2$[ et sur ]-2 ; $+\infty$[ en tant que quotient et composée de fonctions dérivables.
   On pose $u(x)=\frac{2-x}{2+x}$. On a u'$(x)=\frac{-4}{(2+x)^2}$ et (Arctan(u))'= $\frac{u'}{1+u^2}$ est du signe de u' donc strictement négatif ici.

On a $f'(x) = \frac{-4}{(2+x)^2+(2-x)^2} = \frac{-4}{8+2x^2} = \frac{-2}{4+x^2} = \frac{-1}{2}\frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}$

4. $f'(x)$ est la dérivée de -Arctan($\frac{x}{2}$) ainsi il existe une constante k telle que :

$$f(x) = \text{-Arctan}(\frac{x}{2}) + \text{k si } x<-2$$

Pour que $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{-\pi}{2}$ on a nécessairement k = $\frac{-3\pi}{4}$

De même il existe une constante k' telle que $f(x) =$ -Arctan($\frac{x}{2}$)+ k' si $x$>-2.

Pour que $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$ on a nécessairement k' = $\frac{\pi}{4}$