Khôlle n° 18

Question de cours

On considère la suite arithmético-géométrique définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des réels , $a \neq 1$. Donner la formule explicite de (u_n)

Exercice 0

Justifier que la suite définie pour tout entier n par $u_n = \cos(n\pi)$ n'a pas de limite.

Exercice 1

Étudier les limites des expressions suivantes quand $n \to +\infty$.

1. $\dfrac{2^{3n+2} + n^2}{8^n}$ **2.** $\dfrac{2^{\ln n}}{n}$

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $v_n = ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.
2. Montrer que la série de terme général v_n est convergente.
3. Montrer que la suite de terme général u_n admet une limite finie strictement positive l.
4. Donner un équivalent simple de n ! quand n tend vers $+\infty$ s'exprimant à l'aide de l.

Remarque : *on se rapproche de la formule de Stirling…*

Exercice 3

On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geq 0$.

1. Étudier f et le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possible de (u_n) ?
2. On suppose $u_0 \in [0, 1/4]$. Montrer que $u_n \in [0, 1/4]$ pour tout n, puis que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?