Khôlle n°17

Question de cours

Valeur et démonstration de $\sum_{k=0}^{n} q^k$

Exercice 0

Déterminer u_n en fonction de n pour la suite

$$(u_n) \text{ définie par : } \begin{cases} u_0 = 5, \ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{2}{9}u_n \end{cases}$$

Exercice 1

Soit u la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0$
2. Prouver, en utilisant le théorème des accroissements finis, que

pour tout entier naturel n, $\quad |u_{n+1} - 2| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - 2|$

3. En déduire que u converge et étudier sa limite.

Exercice 2 :

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k-1)(4k+3)}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{4n-1}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. En déduire qu'il existe un réel ℓ tel que : $\forall n \geqslant 1, \ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.
3. Montrer alors que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $|\ell - u_n| \leqslant \dfrac{1}{4n-1}$.

Exercice 3

On se donne $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites réelles.
On suppose que $u_n + 2v_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et que $2u_n - 3v_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$?