Khôlle n°16

Question de cours

Si ($e_1, e_2, \dots, e_p$) est une base de $\mathbb{R}^p$ alors
Im(f)= Vect($f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$)

Exercice 1
On considère la matrice :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).$$

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel et d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice est A relativement à la base $\mathscr{B}$.

1. Montrer que l'endomorphisme p est une projection.
2. Déterminer une base de l'image de p et une base du noyau de p.

Exercice 2

En utilisant l'endomorphisme canoniquement associé à A= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Déterminer rapidement A^2 et A^3.

Exercice 3

Soit E = $\mathbb{R}_3[x]$.

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \mapsto & P - P' \end{array} \right.$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Pour $P \in E$, déterminer $deg(f(P))$ en fonction de $deg(P)$.
   En déduire que f est injective.
3. Soit Q un polynôme de degré p; on pose $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} Q^{(k)}$. Déterminer $f(P)$.
4. Montrer que f est surjective. f est donc bijective.
5. Déterminer f^{-1}.