Khôlle n°16

Question de cours

Une famille de polynômes non nuls de degrés tous différents est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On note B= (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Déterminer pour $1 \leq i \leq 4$, $f(e_i)$.
2. En déduire une base de Ker(f) et une base de Im(f) sans calcul.

Exercice 2

On pose

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(*1*) La matrice **A** est-elle anti-symétrique ? La matrice **B** est-elle anti-symétrique ?

(*2*) Démontrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(*3*) Soit u l'application linéaire associée à la matrice A.
Déterminer le rang de u et la dimension de son noyau. Donner une base de Ker(u).

Exercice 3

Les parties sont indépendantes

Partie A : On considère deux projecteurs p et q de $\mathbb{R}^n$ qui commutent.

1) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
2) Prouver que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$
3) Montrer que $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

Partie B : On considère p et q deux projecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que p+q = Id et on définit l'endomorphisme

$$f = 3p - q.$$

1) Montrer que le polynôme $X^2 - 2X - 3$ annule f.
2) En déduire que f est bijectif et déterminer f^{-1} en fonction de f et Id.

Partie C : On considère p un projecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que Id-p est aussi un projecteur.