Khôlle n°1 (S1)

Question de cours

Pour a et b es réels et n un entier naturel non nul, factoriser $a^n - b^n$ (énoncé et démonstration)

Exercice 1

Pour toutes suites numériques (u_n) et (v_n), on définit leur produit de convolution w = u * v de la façon suivante : $\forall n \in N \ , w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \, v_{n-k}$.

a) Calculer w_n si $u_n = 2$ et $v_n = 3$.
b) Calculer w_n si $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.
c) Calculer w_n si $u_n = \frac{2^n}{n!}$ et $v_n = \frac{3^n}{n!}$

Exercice 2

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \, k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}$$

Exercice 3

Donner la formule explicite pour la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = 3 \, u_n - 4$.

Exercice 4

Soit n un entier naturel, calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} \binom{n}{k}$

Khôlle n°1 (S1)

Question de cours

Énoncer et démontrer la formule explicite pour une suite arithmético-géométrique.

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{9}{5} \times 2^n + \frac{1}{5} \times (-3)^n$.

Exercice 2

Calculer, pour n entier non nul

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1} \qquad \sum_{k=1}^{n} 4^{2k} \qquad \sum_{k=n}^{2n} (2^k + k).$$

Exercice 3

Simplifier pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{(n-2)!}{n!}$

Exercice 4

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n-1} 5\binom{n}{k}$$

Khôlle n°1 (S1)

Question de cours

Soit n un entier naturel. Donner l'expression de

$$\sum_{k=0}^{n} k$$

Démontrer ce résultat.

Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = a, \text{ et, pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n\,(2 - u_n)$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

Montrer que la que la fonction f définie sur [0 ;1] par $f(x) = x(2-x)$ est croissante .

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a : $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

2) En déduire un majorant de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 3

Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, les produits suivants.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) \;;\; \prod_{k=1}^{n}(2k) \;;\; \prod_{k=1}^{n}(k^2) \;;\; \prod_{k=1}^{n}(2^k)$$

Exercice 4

En considérant P+I et P-I calculer P = $\sum_{0\leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et I = $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$.

Khôlle n°1 (S2)

Question de cours

Soit n un entier naturel et q un réel distinct de 1. Donner l'expression de

$$\sum_{k=0}^{n} q^k$$

Démontrer ce résultat.

Application : Soient m ≤ n des entiers naturels et q un réel. Calculer $\sum_{k=m}^{n} q^{2k}$

Exercice 1

A) Soit n un entier au moins égal à 2. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-2} (2k+1)^3$$

B)

Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$.

Exercice 2

On pose, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$S_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + \cdots + (n-1)2^{n-2}.$$

1) Ecrire, pour tout $n \geq 2$, S_n avec le symbôle Σ
2) Montrer que par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1.$$

Exercice 3

Donner la formule explicite pour la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Exercice 4

Soit n un entier naturel, calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}$

Khôlle n°1 (S2)

Question de cours

Soit n un entier naturel. Donner l'expression de

$$\sum_{k=0}^{n} k^2$$

Démontrer ce résultat.

Exercice 1

Calculer pour n≥ 2

$$\sum_{k=0}^{n-2} (k+1)^3$$

Exercice 2

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 5^n \geqslant 2^n + 3^n$.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4^n \end{cases}.$$

1. Établir que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+2} = \frac{13}{3}u_{n+1} - \frac{4}{3}u_n.$$

2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{8}{11}(\frac{1}{3})^n + \frac{3}{11}4^n$

Exercice 4

Soit n un entier naturel non nul, calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 3^k 2^{n-k}$

Khôlle n°1 (S2)

Question de cours

Soit n un entier naturel. Donner l'expression de

$$\sum_{k=0}^{n} k^3$$

Démontrer ce résultat.

Exercice 1

Justifier que pour tout entier naturel N≥ 2,

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}} = \frac{\sqrt{N+1}+\sqrt{N}-\sqrt{2}-1}{2}$$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2/5$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2}$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < \frac{1}{2}$.

Exercice 3

1) Soit $a \in [0\ ;1[$ et n $\in \mathbb{N}^*$. Calculer $\prod_{i=0}^{n} \exp(a^i)$
2) Montrer $que\ 1 + x \leq e^x\ pour\ tout\ réel\ x$
3) En déduire que $\prod_{i=0}^{n}(1 + a^i) \leq \exp\left(\frac{1}{1-a}\right)$

Exercice 4

Soit n un entier naturel, calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k+1} 3^k 2^{n-k}$