

Maths: Montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse.

exo 30  
33 TD9

→ il faut que cela soit une matrice carrée telle que  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$  est dite inversible s'il existe une matrice  $B$  de  $M_n(\mathbb{R})$  telle que  $AB = BA = I$  et  $B = A^{-1}$  qui est unique

1<sup>re</sup> méthode:

→ connaître une relation polynomiale nulle de  $A$

ex:  $A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^2 - 3A - I_n = 0.$

$\Leftrightarrow A(A - 3I_n) = I_n$

Donc elle est inversible et  $A^{-1} = A - 3I_n.$

2<sup>e</sup> méthode: si  $A$  une matrice carrée d'ordre 2.

calculer le déterminant, si  $\det(A) = ad - bc \neq 0$

alors  $A$  est inversible avec  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

et  $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

3<sup>e</sup> méthode:  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$  inversible si et seulement si pour toute matrice  $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  le système

$AX = Y$  (d'inconnue  $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ ) admet

$\forall Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  Cramer

$\exists! X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = Y$

Dans ce cas  $AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y$