Inverser une matrice

Seules les matrices carrées (n lignes et n colonnes, $n \in \mathbb{N} \setminus [\![0, 1]\!]$) sont inversibles, à la condition que leur déterminant soit non nul.

1. Cas des matrices carrées d'ordre 2

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$$

Si $\det(M) \neq 0$, alors $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En effet, $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

2. Cas des matrices carrées d'ordre 3 HORS PROGRAMME

3. Plus généralement

TB

$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On écrit : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Par opérations similaires, on veut transformer $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow \frac{1}{6} L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right).$$

Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

On vérifie :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} & \frac{2}{2} & -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

autres méthodes: avec un polynôme annulateur ou la résolution d’un système