Interrogation écrite n°6 (A)

NOM : ……………………………..

On considère ici que $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Qu'appelle-t-on la base canonique de E ?

2. (a) Soit $G = \{P \in E \ / \ P(1) = 0\}$. Préciser une base et la dimension de G.

   (b) Soit $H = Vect(1 + X + X^2 + X^3)$. Préciser la dimension de H.

   (c) Montrer que $G \cap H = \{0\}$. Les ensembles G et H sont-ils supplémentaires dans E ?

3. (a) Soit la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$ où $P_1(X) = X^2, P_2(X) = X^2 - 1, P_3(X) = X^3 + X + 1$.
   Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

   (b) En utilisant un/des polynôme(s) de la base canonique, compléter la famille $\mathcal{F}$ en une base de E.

Corrigé de l'interrogation écrite n°6 (A)

1. La base canonique de E est la famille $(1, X, X^2, X^3)$

2. (a) P ∈ G ⇔ $X-1$ divise P ainsi G = Vect (X-1, (X-1)X, (X-1) X^2). Les polynômes étant échelonnés en degré, ils forment une famille libre donc on a dim(G)= 3.
(b) dim H = 1 puisqu'un seul « vecteur » (polynôme) génère H.
(c) Soit P ∈ G∩H alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, P = $\lambda(1+X+X^2+X^3)$ et P(1)= 0= 4 λ donc $\lambda = 0$ et P = 0. G et H sont en somme directe. Étant donné les dimensions et la formule de Grassmann, on a même G⊕H= E : les espaces G et H sont bien supplémentaires dans E.

3. (a) **Méthode 1 :** $(P_1; P_2)$ forme clairement une famille libre et $P_3 \notin Vect(P_1; P_2)$ donc $(P_1; P_2; P_3)$ forme une famille libre.
Méthode 2 : On considère (a,b,c) des réels tels que a$X^2 + b(X^2-1) + c(X^3+X+1) = 0$ pour tout réel X.
En évaluant pour X=0, on a : -b+c=0.
En évaluant pour X=-1, on a : a-c =0 ; donc a= b= c.
En évaluant pour X=2, on a : 4a+3b+11c=0 donc 18c= 0 puis a=b=c=0 .

(b) **Méthode 1 :** Montrons que E ⊂ Vect($P_1; P_2; P_3; X$). Pour cela il suffit de montrer que chaque vecteur de la base canonique de E est dans Vect($P_1; P_2; P_3; X$).
1= $P_1 - P_2$; X = X; $X^2 = P_1$; $X^3 = P_3$-$(X+1) = P_3$-$(X + P_1 - P_2)$
Méthode 2 : Montrons que $X \notin Vect(P_1; P_2; P_3)$
Méthode 3 : Montrons que $(P_1; P_2; P_3; X)$ est une famille libre…

Remarque : Le polynôme X+1 convient également car $X+1 \notin Vect(P_1; P_2; P_3)$