Interrogation écrite n°6 (B)

NOM : ……………………………..

On considère ici que $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Qu'appelle-t-on la base canonique de E ?

2. (a) Soit $G = \{P \in E \ / \ P(-1) = 0\}$. Préciser une base et la dimension de G.

   (b) Soit $H = Vect(X + X^2 + X^3)$. Préciser la dimension de H.

   (c) Montrer que $G \cap H = \{0\}$. Les ensembles G et H sont-ils supplémentaires dans E ?

3. (a) Soit la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$ où $P_1(X) = X^2, P_2(X) = X^2 + 1, P_3(X) = X^3 - X + 1$.
   Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

   (b) En utilisant un/des polynôme(s) de la base canonique, compléter la famille $\mathcal{F}$ en une base de E.

Corrigé de l'interrogation écrite n°6 (B)

1. La base canonique de E est la famille $(1, X, X^2, X^3)$

2. (a) P ∈ G ⇔ $X+1$ divise P ainsi G = Vect (X+1, (X+1)X, (X+1) X^2). Les polynômes étant échelonnés en degré, ils forment une famille libre donc on a dim(G)= 3.
(b) dim H = 1 puisqu'un seul « vecteur » (polynôme) génère H.
(c) Soit P ∈ G∩H alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, P = $\lambda(X + X^2 + X^3)$ et P(-1)= 0=-λ donc $\lambda = 0$ et P = 0. G et H sont en somme directe. Étant donné les dimensions et la formule de Grassmann, on a même G⊕H=E: les espaces G et H sont bien supplémentaires dans E.

3. (a) **Méthode 1 :** $(P_1;P_2)$ forme clairement une famille libre et $P_3 \notin Vect(P_1;P_2)$ donc $(P_1;P_2;\ P_3)$ forme une famille libre.
Méthode 2 : On considère (a,b,c) des réels tels que a$X^2 + b(X^2+1) + c(X^3 - X + 1) = 0$ pour tout réel X.
En évaluant pour X=0, on a : b+c=0.
En évaluant pour X=1, on a : a+2b+c =0 ; donc a+b=0 soit a=-b=c.
En évaluant pour X=2, on a : 4a+5b+7c=0 donc 6c= 0 ainsi a=c=-b=0 .

(b) **Méthode 1 :** Montrons que E ⊂ Vect($P_1;P_2;\ P_3;\ X$). Pour cela il suffit de montrer que chaque vecteur de la base canonique est dans Vect($P_1;P_2;\ P_3;\ X$).
1= $P_2 - P_1$; X = X ; $X^2 = P_1$; X^3 =P_3+X-1= P_3+X-($P_2 - P_1$)
Méthode 2 : Montrons que $X \notin Vect(P_1;P_2;P_3)$
Méthode 3 : Montrons que $(P_1;P_2;\ P_3;\ X)$ est une famille libre…

Remarque : Le polynôme X-1 convient également $X - 1 \notin Vect(P_1;P_2;P_3)$