Corrigé de l'interrogation écrite n°7

Barème : 2 points par question, 2 points sur les notations

Remarque : $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ est la somme de la série convergente $\sum_{k\geq 1} u_k$; c'est donc la limite quand N tend vers +∞ de la somme partielle $\sum_{k=1}^{N} u_k$. Il ne faut pas confondre ces 3 objets qui ne sont pas du même ordre, ils ne peuvent donc pas être égaux.

a) Pour N≥ 1 :

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{5}{3^k}=\sum_{k=1}^{N}\frac{5}{3\times 3^{k-1}}=\frac{5}{3}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{3^{k-1}}=\frac{5}{3}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{3^j}$$

On reconnaît une série géométrique convergente de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\frac{5}{3}$, donc on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{5}{3^k}=\frac{5}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{5}{2}$$

b) Pour N≥ 0 :

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{4(-1)^{k+1}}{k!}=\sum_{k=0}^{N}\frac{-4(-1)^k}{k!}=-4\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k!}$$

On reconnaît – 4 fois une série exponentielle convergente donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4(-1)^{k+1}}{k!}=-4e^{-1}$$

c) Pour N≥ 1 :

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{k(k-1)}{6^k}=\sum_{k=0}^{N}\frac{k(k-1)}{6^2\times 6^{k-2}}=\frac{1}{36}\sum_{k=0}^{N}\frac{k(k-1)}{6^{k-2}}=\frac{1}{36}\sum_{k=2}^{N}\frac{k(k-1)}{6^{k-2}}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée 2 fois donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{6^k}=\frac{1}{36}\frac{2}{(1-\frac{1}{6})^3}=\frac{12}{125}$$

d) Le terme général de cette série est équivalent à $\frac{1}{4}\frac{1}{k^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc le critère d'équivalence des suites positives permet d'assurer que la série de terme général $\frac{1}{4k^2-1}$ converge. On décompose la fraction : on cherche a et b des nombres tels que $\frac{1}{4k^2-1}=\frac{a}{2k-1}+\frac{b}{2k+1}=\frac{a(2k+1)+b(2k-1)}{4k^2-1}$. Par identification on a :

$$\begin{cases}2a+2b=0\\ a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-b\\ 2a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-b\\ a=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Alors pour N≥ 1 :

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2N+1})$$

(somme télescopique) Puis en passant à la limite quand N tend vers +∞ , on trouve :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}$$