HKBL 2020-2021

Corrigé de l'interrogation écrite n°2 (A)

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{u\to0^-} ue^u = 0$ par composition et produit.
   La droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale en -∞.

2. A l'intérieur du ln il y a une FI du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » , on factorise par le plus haut degré et on simplifie:
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x^2+2x-3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{x(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})}\right) = \lim\limits_{u\to0^+} \ln(u) = -\infty$ par quotient et composition
   Pas d'interprétation possible.

3. C'est une FI du type « +∞ − ∞ ». Avec des racines carrées on pense à l'expression conjuguée:
   $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^+} \left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

   $= \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2+u}+\sqrt{1+u}} = 0$ par composition, addition et quotient (du type « $\frac{1}{+\infty}$ »).
   On peut prolonger la fonction par continuité à droite de 0 en posant f(0)=0.

HKBL 2020-2021

Corrigé de l'interrogation écrite n°2 (B)

1. $\lim\limits_{x\to0^+}(x-2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x) = -\infty$ alors par produit $\lim\limits_{x\to0^+}(x-2)\ln(x) = +\infty$
   La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale.

2. On a une FI du type « $\frac{0}{0}$ ». Avec des racines carrées on pense à l'expression conjuguée:

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)$$
$$= \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

   Ainsi $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$ par quotient.
   On peut prolonger la fonction par continuité en 0 en posant f(0)=1.
   Remarque : avec l'habitude, on pourra aussi utiliser les limites par équivalents usuels.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to0^+}\ln(1+X) = \lim\limits_{y\to1^+}\ln(y) = 0^+$
   Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = +\infty$ par composition et quotient du type « $\frac{+\infty}{0^+}$ ».
   Pas d'interprétation possible.

HKBL 2020-2021

Corrigé de l'interrogation écrite n°2 (C)

1. On a une FI du type «$\frac{0}{0}$» parce que 2 est racine du numérateur et du dénominateur. On peut donc factoriser par $x-2$ et simplifier, en effet : $\frac{x^3-8}{x-2} = \frac{(x-2)(\sum_{k=0}^{2} x^k 2^{2-k})}{x-2} = \sum_{k=0}^{2} x^k 2^{2-k} = 4+2x+x^2$
   Alors $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} 4+2x+x^2 = 12$
   On peut prolonger la fonction par continuité en 2 en posant f(2)=12.

2. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$. Dons par quotient, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x^2} = +\infty$
   La droite d'équation x = 0 est asymptote verticale.

3. C'est une FI du type « $+\infty + -\infty$ ». Avec des racines carrées on pense à l'expression conjuguée: $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}} = 0$ par composition, somme et quotient du type « $\frac{-1}{+\infty}$ ».
   La droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale en +∞.

HKBL 2020-2021

Corrigé de l'interrogation écrite n°2 (D)

1. On a une FI du type « $+\infty - \infty$ ». Avec des racines carrées on pense à l'expression conjuguée:

$$\left(\sqrt{2+x^2} - \sqrt{1+x^2}\right)\frac{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{1+x^2}}$$

   Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2+x^2} - \sqrt{1+x^2} = 0$ par opérations.
   La droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale en +∞.

2. On a une FI du type «$\frac{0}{0}$» parce que 1 est racine du numérateur et du dénominateur. On peut donc factoriser par $x-1$ et simplifier, en effet : $\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(\sum_{k=0}^{2} x^k)}{x-1} = \sum_{k=0}^{2} x^k = 1+x+x^2$
   Alors $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} 1+x+x^2 = 3$
   On peut prolonger la fonction par continuité en 1 en posant f(1)=3.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; ainsi par produit on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$

   Pas d'interprétation possible.