

IDÉE KHOLLE 3

Exercice 1 ★

1. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $\frac{13}{12}z^2 - z + 6 = 0$.
2. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $-z^2 - 3z - \frac{45}{2} = 0$.
3. Résoudre, dans \mathbb{C} , l'équation $z^2 + 5 = 4z$.

Exercice 2 ★

Donner les formes algébriques de **(1)** $\frac{(i-1)^5}{(i+1)^4}$, **(2)** $\left(\frac{-2}{i+1}\right)^9$ et **(3)** $\left(\frac{-4}{\sqrt{3}+i}\right)^{19}$.

Remarque : Pensez à passer par la forme exponentielle (à cause des quotients et des puissances)

Exercice 3 ★ ★ ★

1. Soient a et b deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$.
Montrer que $\frac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux nombres complexes tels que $a\bar{b} \neq -1$.
On pose $z = \frac{a-b}{1-ab}$. Montrer que : $|z| = 1 \Leftrightarrow |a| = 1$ ou $|b| = 1$

Exercice 4 ★ ★

1. Calculer $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ pour $\theta = \frac{\pi}{12}$.
2. Calculer $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ pour $\theta = \frac{\pi}{8}$.

Exercice 5 ★

Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

- 1) $\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x)$
- 2) $\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$
- 3) $\sqrt{2}\sin(x) = 1$
- 4) $\tan(x) = -\sqrt{3}$

Exercice 6 ★ ★

Résoudre les inéquations trigonométriques suivantes :

1. $-\frac{1}{2} \leq \cos(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0; 2\pi[$.
2. $-\frac{1}{2} < \sin(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $] -\pi; \pi]$.
3. $3 - 4\sin^2(x) < 0$ sur $[0; 2\pi[$.

Exercice 7 ★ ★

Montrer les égalités suivantes, sous couvert d'existence :

1. $\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
2. $\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)} = \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. $\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Exercice 8 ★ ★ ★

Résoudre les équations suivantes :

1. $\cos(x) + \sin(x) = 1$
2. $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = \sqrt{2}$
3. $\sqrt{6}\cos(2x) + \sqrt{2}\sin(2x) = -2$

Exercice 9 ★ ★ ★ ★

Soit f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \cos(3x) - (2 + \sqrt{3})\cos(2x) + (3 + 2\sqrt{3})\cos(x) - (2 + \sqrt{3}).$$

1. Exprimer $f(x)$ uniquement à l'aide de $\cos(x)$ et de ses puissances.
2. Factoriser f .
3. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.