Corrigé du devoir maison n°3

A) Soit $(m,x) \in \mathbb{R}^2$. L'équation proposée s'écrit

$$x^2 + (m-7)x + m - 4 = 0$$

On calcule : $\Delta = (m-7)^2 - 4(m-4) = m^2 - 18m + 65 = (m-9)^2 - 16$

- Cette équation a une seule solution réelle si et seulement si $m - 9 = -4 \; ou \; 4 \Leftrightarrow m = 5 \; ou \; 13$ et dans ces cas $x = \frac{-(m-7)}{2} \; soit \; 1 \; ou -3$.

Si m=5 alors il y a une solution réelle, S = {1} ; si m = 13 alors il y a une solution réelle, S = {-3}

- Cette équation n'admet pas de solution réelle si et seulement si $m \in]5;13[$

Si m $\in]5;13[$ alors il n'y a pas de solution réelle, S = Ø

- Cette équation admet 2 solutions réelles si et seulement si m<5 ou m>13. Dans ces cas les solutions s'écrivent :

Si m<5 ou m>13 alors il y a deux solutions réelles, S=$\left\{\frac{-m+7-\sqrt{m^2-18m+65}}{2} ; \frac{-m+7+\sqrt{m^2-18m+65}}{2}\right\}$

B)

1. Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$. En remarquant que 1 = $e^{i0} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}$,
   on a z = $e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})$ = $e^{i\frac{\theta}{2}} 2\, cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ d'après la formule d'Euler.
   $\theta \in]-\pi;\pi[$ donc $\frac{\theta}{2} \in]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ ainsi $cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ et $|z| = |\, e^{i\frac{\theta}{2}}| \times |2| \times |cos\left(\frac{\theta}{2}\right)| = 2\, cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
   Conclusion : la forme exponentielle de z est $2\, cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times e^{i\frac{\theta}{2}}$
2. La forme exponentielle de z^4 est d'une part : $16cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{2i\theta}$ d'après la formule de Moivre et par compatibilité du module avec le produit/les puissances.
   Par ailleurs avec la formule du binôme de Newton, on a :
   $z^4 = 1 + 4e^{i\theta} + 6e^{2i\theta} + 4e^{3i\theta} + e^{4i\theta}$
   $\quad = e^{2i\theta}\left(e^{-2i\theta} + 4e^{-i\theta} + 6 + 4e^{i\theta} + e^{2i\theta}\right)$
   $\quad = e^{2i\theta}(2\cos(2\theta) + 8\cos(\theta) + 6)$ d'après la formule d'Euler
   En comparant avec l'écriture précédente, on a nécessairement $|z^4|$=$2\cos(2\theta) + 8\cos(\theta) + 6$ donc $2\cos(2\theta) + 8\cos(\theta) + 6 > 0$.
3. En identifiant les modules dans les 2 écritures précédentes de z^4 on a $\forall\theta \in]-\pi;\pi[$:

$$16cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos(2\theta) + 8\cos(\theta) + 6$$

CQFD

Remarque : pensez à nommer les formules utilisées.