Proposition 48 Formule de Grassmann.
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un même espace E, alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. En particulier, si F et G sont supplémentaires dans E, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration. Cette formule nous rappelle diablement celle du cardinal d'une union de deux ensembles. C'est en fait tout à fait logique, puisqu'elle s'identifie exactement à une formule de cardinal d'union si on considère des bases de chacun des espaces vectoriels concernés. Nous allons d'ailleurs la prouver en suivant le même schéma, c'est-à-dire en commençant par le cas particulier où F et G sont supplémentaires. Notons $(f_1, \dots, f_k)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_p)$ une base de G et prouvons que $(f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_p)$ est une base de E (l'égalité des dimensions en découlera immédiatement). Soit $x \in E$, comme F et G sont supplémentaires, on peut décomposer x en $x_F + x_G$ (avec les notations classiques utilisées dans notre précédent chapître sur les espaces vectoriels). Par ailleurs, $x_F = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i$, et $x_G = \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j$. Le vecteur x s'écrit donc comme combinaison linéaire de la famille $(f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_p)$, qui est donc génératrice. Reste à prouver qu'elle est libre, supposons que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j = 0$, on peut écrire $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = -\sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j$. Le membre de gauche est dans F, celui de droite dans G, l'intersection de ces deux sous-espaces est réduite à $\{0\}$ puisqu'ils sont supplémentaires, les deux membres sont donc nuls. Mais les familles $(f_1, \dots, f_k)$ et $(g_1, \dots, g_p)$ étant libres, cela implique la nullité de tous les coefficients de la combinaison linéaire, et donc la liberté de la famille.

Passons au cas général. Notons F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F et G' un supplémentaire de $F \cap G$ dans G (de tels supplémentaires existent, il suffit de compléter une base de $F \cap G$ en base de F ou de G et de conserver les vecteurs ajoutés pour en obtenir une base d'après la première partie de la démonstration). On peut certainement affirmer que $\dim(F) = \dim(F') + \dim(F \cap G)$ et $\dim(G) = \dim(G') + \dim(F \cap G)$. Par ailleurs, F' et G sont supplémentaires dans $F + G$. En effet, leur intersection est réduite à $\{0\}$ puisqu'un vecteur de l'intersection appartiendrait à la fois à F' et à $F \cap G$, qui sont supplémentaires dans F, et leur somme est bien égale à $F + G$: un vecteur pouvant s'écrire sous la forme $x_F + x_G$ peut encore se décomposer en $x_{F'} + x_{F \cap G} + x_G$, avec $x_{F \cap G} + x_G \in G$. Toujours en appliquant notre formule dans le cas particulier démontré, $\dim(F+G) = \dim(F') + \dim(G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$. □