montrer qu'une fonction est prolongeable par continuité

si f est définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

- f est prolongeable par continuité en x_0

si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

① si les limites à droite et à gauche de x_0 sont finies et sont égales, on peut prolonger par continuité la fonction en x_0.

②. on prolonge par continuité en posant $f(x_0) = \ell$.

– exemple montrer que $f(x) : \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$ est prolongeable par continuité à droite de 0.

① $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = 0$

② donc f admet une limite finie en 0^+, on peut prolonger f en $x=0$ en posant $f(0) = 0$.

(H)

cf. TD6, Ex 7

Comment justifier qu'une fonction est dérivable en un point ?

$$f \text{ dérivable en } x_0 \iff \begin{cases} \text{dérivable à droite en } x_0 \; * \\ \text{dérivable à gauche en } x_0 \; ⊛ \\ f'_g(x_0) = f'_d(x_0) \end{cases}$$

* si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie

⊛ si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.