Déterminer si une fonction est paire ou impaire, ou aucun des deux.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $x \in I$.

$\boxed{f \text{ est paire}}$ sur l'intervalle I si et seulement si $f(-x)$ est défini sur I, donc

1ère chose à vérifier : 2e chose à vérifier :

si l'intervalle <u>I est centré en 0</u>, et si <u>$f(-x) = f(x)$</u>

$\forall x \in I$,

Pour savoir si f est paire, il suffit de vérifier que l'intervalle de définition est centré en 0, puis calculer $f(-x)$ pour tout x de cet intervalle et vérifier que $f(-x) = f(x)$. On peut alors affirmer que f est paire.

Pour savoir si $\boxed{f \text{ est impaire}}$ on emploie la même méthode que ci-dessus. 1ère chose à vérifier : si l'intervalle de définition est centré en 0, 2e chose à vérifier : si $\forall x \in I$ $f(-x) = -f(x)$ alors f est impaire

Lever une FI avec des équivalents en l'infini

ex 12 TD6.

- **Avec ln** : $g(x) \underset{x_0}{\sim} f(x)$ et si $f(x) \neq 1$ on a :

  $\ln(g(x)) \underset{x_0}{\sim} \ln(f(x))$.

  → Avant de composer penser à vérifier

- **Avec polynôme** : en $+\infty$ f° polynomiale non nulle est équivalente à son terme de + haut degré.

exemple : 12.6 : $\ln(4x^2 - 2x + 1)$ en $+\infty$.

- $4x^2 - 2x + 1 \underset{+\infty}{\sim} 4x^2$ pt.2
- $\lim\limits_{x \to +\infty} 4x^2 = +\infty \neq 1$ donc on peut composer.
- $\ln(4x^2 - 2x + 1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(4x^2)$ pt.1

- **Avec une variable en puissance** : utiliser $a^x = e^{x \ln a}$.

exemple 12.13 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{2}} = \exp\left(\frac{x^2}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$.

- $\ln(1+X) \underset{0^+}{\sim} X$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ (on peut substituer)

  exemple : 12.8 $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} = 1$

BONNET Emma 8B

MONTRER QU'UNE FONCTION EST PROLONGEABLE PAR CONTINUITÉ

Rappel définition :

f continue au point x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Quand prolonger une fonction par continuité en un point x_0 ?

Lorsque f n'est pas définie en un réel x_0.

Méthode :

Calcul de la limite à droite / à gauche de x_0

- la limite est finie → on calcule la limite de l'autre côté de x_0
  - la 2e limite de f n'est pas finie ⇓ pas prolongeable
  - $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ ⇓ pas prolongeable
  - $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ⇓ la fonction f est prolongeable en x_0 par continuité → On pose $f(x_0) = l$ pour la prolonger par continuité
- la limite n'est pas finie → on peut déjà s'arrêter : la fonction ne sera pas prolongeable en x_0.

⚠ Pour la suite de l'exercice : En donnant une valeur à $f(x_0)$ on modifie l'ensemble de définition de f donc on modifie f. On peut alors la noter $\tilde{f}$.

Groupe NetA

Fonction est continue sur un intervalle ?

* Par <u>composition</u> de fonctions continues
* Par <u>opérations</u> de fonctions continues sur l'intervalle

(le dénominateur ne s'annulant pas si un quotient).

⚠, si on cherche la continuité sur un intervalle "plus large" que celui sur lequel les fonctions usuelles sont continues, il faut étudier le <u>prolongement par continuité</u> :

par exemple : étudier la continuité sur $[0 ; +\infty[$ de

$$f : x \longmapsto \ln(x)x$$

suppose d'étudier la continuité sur $]0 ; +\infty[$ (facile) puis de chercher si

$\ln(x)x$ admet une <u>limite finie</u> en 0^+

Si c'est le cas on pourra prolonger f par continuité et dire qu'elle est continue sur $[0 ; +\infty[$

→ . Similairement, lorsqu'une fonction est définie par deux expressions :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \\ e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$l \in \mathbb{R}$

Il faut vérifier que $\underline{\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(1+x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = l}$

Si c'est le cas alors ici f est continue sur $\mathbb{R}$. car déjà continue sur $[0 ; +\infty[$ et sur $]-\infty ; 0[$ par opérations

→ Comment justifier qu'une fonction est dérivable sur un intervalle ?

→ Vérifier que la fonction est définie sur l'intervalle en question

→ Par opérations de fonctions dérivables sur leurs intervalles de définition.

- → composition
- → somme
- → produit
- → quotient : ⚠ dénominateur qui ne s'annule pas.

Justifier qu'une fonction est continue sur un intervalle ou en un point

1. En un point :

* Soit f une fonction définie sur un intervalle I
Soit a un point appartenant à I

f continue en $a \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est définie en } a \\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a) \end{cases}$

* Exemple : $f : x \mapsto |x|$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f est-elle continue en 0 ?

- Sur $\mathbb{R}^-$, $|x| = -x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} |x| = \lim\limits_{x\to 0^-} -x = 0$.
- Sur $\mathbb{R}^+$, $|x| = x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} |x| = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$.
- $f(0) = |0| = 0$.

Ainsi, f est continue en 0.

2. Sur un intervalle :

* Soient f et g deux fonctions continues sur I
Alors, $(f+g)$ et $(f \times g)$ sont continues sur I
$(f \div g)$ aussi, si $g(x)$ ne s'annule pas sur I
$f \circ g$ aussi si $g(I) \subset I$

* Exemple : $a : x \mapsto \sqrt{\frac{6x}{3x+1}}$, a est continue sur quel intervalle ?

- $3x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{3}$
- $\frac{6x}{3x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6x+2-2}{3x+1} \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{3x+1} \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq \frac{2}{3x+1} \Leftrightarrow 1 \leq 3x+1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

$\begin{cases} x \neq -\frac{1}{3} \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$: a est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Sur $\mathbb{R}^+$: $x \mapsto 6x$ est continue, $x \mapsto 3x+1$ aussi et par quotient : $x \mapsto \frac{6x}{3x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

Par composition, $x \mapsto \sqrt{\frac{6x}{3x+1}} = a(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.