Décomposer un vecteur dans une base :

⇒ C'est écrire un vecteur comme la combinaison linéaire des vecteurs d'une base.

Exemple :

$\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}\right)$ est une base de $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}\right)$

→ Décomposer $u = \begin{pmatrix}4\\9\\-10\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}\right)$:

$u \in \left(\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \exists\, a, b$ réels / $\begin{cases} a - b = 4 \\ 3a = 9 \\ -2a + 4b = -10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 4 \\ a = 3 \\ 2b = -2 \end{cases}$ $\quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 4 \\ a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$ COMPATIBLE

Donc $u = 3(1, 3, -2) - 1(-1, 0, 4)$ est une décomposition de u dans la base $((1, 3, -2), (-1, 0, 4))$.

Applications :

- Pour montrer qu'une famille est génératrice :

→ On montre que tout vecteur d'un espace donné s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille

$\boxed{10}$ Montrer que la famille $B = ((1, 6, 9), (1, 4, 6), (3, 6, 2))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Prenons $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On cherche x, y, z tels que :

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\6\\9\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}$$

: on a bien écrit une décomposition de (a, b, c) dans la famille B.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 3z = a \\ 6x + 4y + 6z = b \\ 9x + 6y + 2z = c \end{cases}$

→ Il ne reste plus qu'à montrer que le système admet au moins une solution !

· Pour écrire un espace vectoriel sous forme de système d'équations cartésienne

$\boxed{14.3}$

$C = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\-1\end{pmatrix}\right)$

$\dim(C) = 2$ et $C \subset \mathbb{R}^4$ donc il faut 2 équations cartésiennes

Prenons $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in C \iff \exists a, b \in \mathbb{R} \,/\, \underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\3\\-1\end{pmatrix}}_{\text{décomposition du vecteur dans la base de } C}$

$$\iff \begin{cases} a = x \\ 2a + b = y \\ -a + 3b = z \\ -b = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = x \\ b = y - 2x \\ -x + 3(2y - 2x) = z \\ -y + 2x = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 7x - 3y - z = 0 \\ 2x - y - t = 0 \end{cases}$$

Ainsi $C = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{cases} 7x - 3y - z = 0 \\ 2x - y - t = 0 \end{cases} \right\}$

· Pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

→ On montre qu'il existe une unique décomposition de tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ dans les sous-espaces vectoriels donnés

Exemple de la définition 47 :

Dans $\mathbb{R}^3$, $F = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \,/\, x + y + z = 0 \right\}$ et $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$

Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire, montrons que $\mathbb{R}^3 = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$

On raisonne par double inclusion.

* $F + G \subset \mathbb{R}^3$ évident car F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.