Exercices sur les suites et les séries (ENS ULM 2018-2019)

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2 - x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(1) Tracer le graphe de f.

On s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 0$.

(2) Démontrer que si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, alors sa limite vaut 1 ou -2.

(3) Démontrer que si $|u_0| > 2$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge.

(4) On suppose dans cette question que pour tout $n \geq 0$, $u_n \neq 1$ et $u_n \neq -2$.

- (a) On suppose que $u_n \to -2$ et on pose $h_n = u_n + 2$. Montrer que $h_{n+1}/h_n \to 4$ lorsque $n \to \infty$ et aboutir à une contradiction.
- (b) Montrer que la suite (u_n) n'a pas de limite.

(5) Trouver toutes les valeurs de u_0 pour lesquelles il existe un entier $n \geq 0$ tel que $u_n = 1$.

Exercice 2. Soit (u_n) une suite de réels positifs décroissante et tendant vers 0. Soit (v_n) la suite définie par

$$v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - nu_n.$$

(1) On suppose dans cette question que la série de terme général u_n converge. Montrer que (v_n) est bornée.

(2) On suppose dans cette question que la suite (v_n) est bornée.

- (a) Calculer $v_n - v_{n-1}$.
- (b) Montrer que la suite v_n converge.
- (c) Montrer que la série de terme général $(n-1)(u_{n-1} - u_n)$ converge.
- (d) Montrer que
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (k-1)(u_{k-1} - u_k) \geq nu_n.$$
- (e) Montrer que la série de terme général u_n converge.

Exercice 3 Soit $n \geq 2$. On pose $f_n(x) = x^n + x - 1$ pour tout $x \geq 0$.

(1) Montrer qu'il existe un unique nombre réel $x \geq 0$ tel que $f_n(x) = 0$. On le notera x_n.

(2) Quel est le signe de $f_{n+1}(x_n)$?

(3) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 1.

(4) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\right)^n = 1$.

(5) En déduire qu'à partir d'un certain rang, $1 - \dfrac{\ln(n)}{n} < x_n < 1$.