Exercices pour réviser

EXERCICE 1 : Algèbre linéaire

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On considère l'endomorphisme $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 5 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $E = \mathsf{Ker}\,(f)$ et $F = \mathsf{Ker}\,(f + id_{\mathbf{R}^3})$.

1.a. Déterminez une base $(\vec{u}_1)$ de E.

b. Résolvez l'équation vectorielle homogène $f(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}_{\mathbf{R}^3}$ d'inconnue $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ et déterminez une base $(\vec{u}_2, \vec{u}_3)$ de F.

2. Montrez que $E \oplus F = \mathbf{R}^3$ et que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ adaptée à cette décomposition.

3.a. Montrez que le plan $\mathcal{P}$, d'équation $x - y + z = 0$ est stable par f, i.e. $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$.

b. Déterminez un supplémentaire de $\mathcal{P}$ dans $\mathbf{R}^3$, stable par f.

EXERCICE 2 : Analyse

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation (E) : $x^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

Pour cela, on pose pour tout réel x strictement positif $f(x) = \sqrt{x}ln(x) + \ln(2)$.

1. Dresser le tableau de variation complet de f (on détaillera le calcul des limites).
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   On rappelle que ln(2)$\approx 0{,}69$ et $\frac{1}{e} \approx 0{,}36$.
3. On cherche ces solutions sous la forme $\frac{1}{n^2}$ où n$\in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 \Leftrightarrow n^2 = 2^n$
   b) En déduire que n doit être pair puis en posant n = 2p montrer que $2^{p-1} = p$.
   c) Déterminer 2 solutions évidentes à cette question.
   d) En déduire les solutions de $f(x) = 0$.
   e) Conclure sur les solutions de (E).

PROBLEME 1 :

Pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$x^{[n]} = \prod_{i=0}^{n-1}(x - i)$$

Par convention pour tout réel x, on note $x^{[0]} = 1$.

1. a) Écrire $x^{[3]}$.
   b) Calculer $(\frac{3}{2})^{[n]}$ pour tous les entiers n inférieurs ou égaux à 5.
   c) Pour k un entier naturel tel que k<n, justifier que $k^{[n]} = 0$.
   d) Pour k un entier naturel tel que k≥n, vérifier que $\binom{k}{n} = \frac{k^{[n]}}{n!}$
   e) Exprimer $(-1)^{[n]}$ en fonction de n!
   f) Montrer que $x^{[n+1]} = x(x-1)^{[n]} = x^{[n]}\,(x - n)$
   g) En déduire que (n+1) $x^{[n]} = (x+1)^{[n+1]} - x^{[n+1]}$
   h) Pour n et p des entiers naturels fixés, simplifier la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} k^{[p]}$$

2. a) Retrouver la somme des premiers entiers et la somme des premiers carrés.
   b) Pour p$\leq n$; exprimer $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$ à l'aide d'un seul coefficient binomial.
3. On définit pour tout entier naturel non nul $x^{[-n]} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(x+i)}$.
   a) Écrire $x^{[-3]}$.
   b) Pour quelles valeurs de x le nombre $x^{[-n]}$ est-il défini ?
   c) Démontrer que, lorsqu'elle a un sens, la relation obtenue à la question 1.g) n $x^{[n-1]} = (x+1)^{[n]} - x^{[n]}$ reste vraie si n<0.
4. a) Simplifier $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+n)}$ et déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$
   b) Montrer que $\sum_{k=p}^{n}\frac{1}{\binom{k}{p}} = p\,!\sum_{k=0}^{n-p} k^{[-p]}$. En déduire la limite de cette somme quand n tend vers +∞.
5. Démontrer par récurrence sur n∈ ℕ la « formule du binôme généralisée» :

$$(x+y)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{[n]}y^{[n-k]}$$

6. On définit pour tout réel x et pour tout entier k, le coefficient binomial généralisé $\begin{bmatrix}x\\k\end{bmatrix} = \frac{x^{[k]}}{k!}$.
   a) Calculer $\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\3\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\3\end{bmatrix}$.
   b) Calculer $\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}$ pour une réel x quelconque et $\begin{bmatrix}-1\\k\end{bmatrix}$ pour un entier k quelconque.
   c) Montrer que la relation de Pascal reste vraie pour les coefficients binomiaux généralisés c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix}x\\k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x\\k+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+1\\k+1\end{bmatrix}$$

   d) En déduire la formule de Chu-Vandermonde :

$$\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}}\begin{bmatrix}x\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\n-k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+y\\n\end{bmatrix}$$

7. a) Montrer que

$$\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}}(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{k}}\begin{bmatrix}x\\k\end{bmatrix} = (-1)^n\begin{bmatrix}x-1\\n\end{bmatrix}$$

   b) Pour k un entier naturel vérifier que $\binom{2k}{k} = (-1)^k 4^k \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\k\end{bmatrix}$
   c) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

PROBLEME 2 : Intégrale de Wallis, formule de Stirling, probabilités et somme de série

Les parties C et D sont indépendantes entre elles mais elles s'appuient sur des résultats établis dans la partie A ou B.

Partie A : Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. (a) A l'aide d'une IPP, montrer que pour tout entier naturel n, on a : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$
   (b) En déduire que pour tout entier naturel non nul p, $I_{2p} = \frac{1 \times 3 \times .... \times (2p-1)}{2 \times 4 \times .... \times (2p)} \frac{\pi}{2}$ et que $I_{2p+1} = \frac{2 \times 4 \times .... \times (2p)}{1 \times 3 \times .... \times (2p+1)}$
   (c) En déduire que pour tout entier naturel p, $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$ et que $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$
3. (a) Donner, pour tout $p \geq 0$, une expression simplifiée de $I_{2p} \times I_{2p+1}$.
   (b) Montrer, en raisonnant par disjonction de cas suivant la parité de n, que pour tout entier naturel n, on a : $I_n \times I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$
4. (a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a : $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. Que peut-on en déduire à propos de la suite (I_n) ?
   (b) Prouver que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1}I_n \leq {I_n}^2 \leq I_n I_{n-1}$.
   (c) En déduire que $I_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ puis déterminer la limite de la suite (I_n).
   On retiendra pour la suite du problème que $\sqrt{\frac{1}{\pi p}} \sim_{+\infty} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$.

Partie B : Formule de Stirling (oraux de l'ENS)

Le but de cette partie est de justifier la formule de Stirling : $n! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}$ et $v_n = ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$.

1. Justifier que pour tout entier $n \geq 1, v_n = -1 + (n + \frac{1}{2})ln(1 + \frac{1}{n})$
2. On rappelle qu'on a, au voisinage de $+\infty$, $ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})$. Justifier alors qu'on a le développement asymptotique suivant : $v_n = \frac{1}{12n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
3. En déduire que la série de terme général v_n converge.
4. Justifier que les suites $(ln(u_n))$ et (u_n) sont convergentes.
   Ainsi il existe bien une constante $K > 0$ telle que $n! \sim_{+\infty} K\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n$.
5. Retrouver la valeur de K à l'aide du résultat établi dans la partie A.

Partie C : Application en probabilités (ESCP 2016)

On considère un jeu de roulette avec n issues possibles, les numéros allant de 1 à n.

Une partie est constituée d'exactement n lancers successifs de la boule.

Pour une partie donnée, on note :

- A_n l'événement "chaque numéro sort exactement une fois"
- X_i la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions du numéro i.
- S_n le nombre de boules qui ne sortent pas

1. (a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $P(A_n) = \frac{n!}{n^n}$
   (b) Donner un équivalent de $P(A_n)$ au voisinage de $+\infty$.

2. (a) En remarquant que $X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}$ où pour tout $1 \leq j \leq n, b_{i,j} = 1$ si le numéro i sort au lancer j et 0 sinon, reconnaître la loi de X_i. En déduire pour tout $k \in [0; n]; P(X_i = k)$

   (b) En remarquant que $X_1 + X_2 + ... + X_n = n$, calculer pour tous entiers j et k, $P_{(X_1+X_2+...+X_{n-1}=j)}(X_n = k)$ et justifier que les variables $X_i, 1 \leq i \leq n$ ne sont pas indépendantes.

3. (a) Que représente la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$? Calculer son espérance et vérifier que $E(\frac{S_n}{n}) \sim_{+\infty} e^{-1}$.

   (b) Pour n = 37, on donne $(\frac{36}{37})^{37} \approx 0,362$. Interprétez ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie D : Application au calcul de la somme d'une série de référence

1. Pour tout entier naturel n, justifier par un changement de variable que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)dt$ (on rappelle que pour tout réel $t, sin(t) = cos(\frac{\pi}{2} - t)$).
2. On pose $D_n = I_{2n}$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 cos^{2n}(t)dt$. Calculer J_0.
3. Montrer, avec une double intégration par parties, que $D_n = n((2n-1)J_{n-1} - 2nJ_n)$.
4. On rappelle que $D_n = \frac{2n-1}{2n} D_{n-1}$ (résultat établi à la question 2a de la partie A). En déduire qu'en posant $Q_n = \frac{J_n}{D_n}$, on a pour tout entier naturel non nul : $Q_{n-1} - Q_n = \frac{1}{2n^2}$.
5. On rappelle que pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}], x \leq \frac{\pi}{2} sin(x)$. En déduire que pour tout entier naturel n, $J_n \leq \frac{\pi^2}{4}(D_n - D_{n+1})$ autrement dit $J_n \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{D_n}{2n+2}$.
6. Justifier alors que (Q_n) converge vers 0 puis que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.