Chap 12

Remarque 3 (p.6)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Montrons que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes pour montrer que la suite (S_n) est convergente.
(en application du Th 13 du chap 11 : CNS de convergence) et du Th 27 du chap 11

- $$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$$
$$= \frac{2n+1 \quad + (-1)(2n+2)}{(2n+2)(2n+1)}$$
$$= \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)} < 0$$

donc (S_{2n}) est décroissante.

- $$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}$$
$$= \frac{(-1)(2n+2) + 2n+3}{(2n+3)(2n+2)}$$
$$= \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} > 0$$

donc (S_{2n+1}) est croissante.

- $$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

<u>Cc</u> (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont des suites adjacentes donc elles convergent vers la même limite ℓ et on a $\lim_{n \to +\infty} S_n = \ell$: la série harmonique alternée converge.