HKBL 22/04/2020

Exercice sur les séries

(type interrogation écrite)

1) Justifier que la série de terme général $u_n = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ est convergente.

2) Calculer les sommes des séries suivantes :

$$a) \sum_{k\geq 1} \frac{6}{5^k}$$

$$b) \sum_{k\geq 0} \frac{3^k}{(k+1)!}$$

$$c) \sum_{k\geq 0} \frac{k(k+1)}{2^k}$$

$$d) \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

Corrigé de l'exercice sur les séries
(type interrogation écrite du 6 mai)

1) On sait qu'au voisinage de 0 on a : $\cos(x) - 1 = \frac{-x^2}{2} + o(x^2)$ soit $1 - cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$ et que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n} = 0$ ainsi en posant $x = \frac{\pi}{n}$, on a au voisinage de $+\infty$:
1-cos($\frac{\pi}{n}$)$\sim\frac{(\frac{\pi}{n})^2}{2}$ soit $u_n \sim \frac{\pi^2}{2n^2}$; et on sait que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Ainsi, d'après le critère d'équivalence des suites positives, on est sûr que la série de terme général u_n est aussi convergente.

2) a) On reconnaît une série géométrique convergente de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $\frac{6}{5}$ alors on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6}{5^k} = \frac{6}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{3}{2}$$

$$(on\ peut\ retenir : 1^{er} terme \times \frac{1}{1 - raison})$$

En effet pour N≥ 1 :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{6}{5^k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{6}{5 \times 5^{k-1}} = \frac{6}{5}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{5^{k-1}} = \frac{6}{5}\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{5^j}$$

b) Pour N≥ 0 :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{3^k}{(k+1)!} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{N} \frac{3^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{N+1} \frac{3^j}{j!} = \frac{1}{3}(\sum_{j=0}^{N+1} \frac{3^j}{j!} - 1)$$

On reconnaît une série exponentielle convergente et la somme vaut : $\frac{1}{3}\ (e^3 - 1)$

c) Pour N≥ 0 :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{k(k+1)}{2^k} = \sum_{j=1}^{N+1} \frac{(j-1)j}{2^{j-1}} = \sum_{j=0}^{N+1} \frac{(j-1)j}{2 \times 2^{j-2}} = \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{N+1} \frac{(j-1)j}{2^{j-2}}$$

On reconnaît la moitié d'une série géométrique dérivée 2 fois et la somme vaut : $\frac{1}{2}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 8$

d) Le terme général de cette série est équivalent à $\frac{1}{k^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc le critère d'équivalence des suites positives permet d'assurer que la série de terme général $\frac{1}{(k+2)(k+3)}$ converge. On décompose la fraction. On cherche a et b des nombres tels que $\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{a}{k+2} + \frac{b}{k+3}$. On a : $\frac{a}{k+2} + \frac{b}{k+3} = \frac{a(k+3)+b(k+2)}{(k+2)(k+3)}$.
Par identification on a : $\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = 1 \end{cases}$. Alors : $\frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}$
Finalement, pour N≥ 0 :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+3}$$

(somme télescopique)

Puis en passant à la limite quand N tend vers +∞ , on trouve :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2}$$