Opérations sur les DL

29/04/20

On rappelle les DL suivants en 0 :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3), \quad \frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$$

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3), \quad \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$$

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o(u^4), \quad \sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + o(u^4)$$

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2(\ln(1+x) - 1)$.

1) Justifier que f est C^∞ sur]-1;+∞[.
2) Ecrire le développement limité à l'ordre 5 de f en 0.
3) En déduire $f^{(n)}(0)$ pour n ϵ $[0;5]$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

1. Donner un développement limité de f à l'ordre 3 en zéro.
2. En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.
3. Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion.

Opérations sur les DL : corrigé

<u>Exercice 1 :</u>

1. f est C^{∞} sur]-1;+∞[par opérations (composée, somme et produit) de fonctions C^{∞} sur cet intervalle]-1;+∞[.
2. Pour avoir le $DL_5(0)$ de f, on a besoin du $DL_3(0)$ de $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
   ainsi $ln(1+x) - 1 = -1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
   et $f(x) = x^2(ln(1+x) - 1) = x^2\ (-1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) + o(x^5)$
   $= -x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + o(x^5)$

3. D'après la formule de Taylor Young on sait que
   $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + o(x^5)$
   Par unicité du DL on peut identifier les parties régulières et retrouver :

$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = 0$$
$$\frac{f''(0)}{2} = -1 \Leftrightarrow f''(0) = -2$$
$$\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = 1 \Leftrightarrow f^{(3)}(0) = 6$$
$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow f^{(4)}(0) = -12$$
$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow f^{(5)}(0) = 40$$

<u>Exercice 2 :</u>

1. Au voisinage de 0, on a : $f(x) = \frac{1}{1+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)}$ (on a factorisé le dénominateur par 2)

<u>Méthode 1 :</u>

Avec le DL de $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$ en posant u $= -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$, on a par substitution (ou composition):

$f(x) = \frac{1}{2}(1 + (-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12}) + \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12}\right)^2 + \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12}\right)^3) + o(x^3)$

on développe :

$f(x) = \frac{1}{2}(1 + (-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12}) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + 2(-\frac{x}{2})(-\frac{x^2}{4}) + \left(-\frac{x}{2}\right)^3) + o(x^3)$ les autres termes sont négligeables devant x^3

$f(x) = \frac{1}{2}(1 + (-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12}) + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{8}) + o(x^3)$

$= \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24}) + o(x^3) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)$

Méthode 2 :

Avec le DL de $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ en posant u $= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$, on a par substitution (ou composition):

$f(x) \ = \frac{1}{2}(1- \ (\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)^3) + o(x^3)$

on développe :

$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + \ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{x}{2} \times \frac{x^2}{4} - \left(\frac{x}{2}\right)^3) + \ o(x^3)$ les autres termes sont négligeables devant x^3

$f(x) \ = \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + \ \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} - \ \frac{x^3}{8}) + \ o(x^3)$

$\quad = \frac{1}{2}(1 \ - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24}) + \ o(x^3) = \ \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + \ o(x^3)$

2. f admet un DL à l'ordre 1 en 0 donc f est dérivable en 0 et la courbe de f admet une tangente au point d'abscisse 0 d'équation

   $$y = \ \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$$

3. Étudions la position de la courbe de f par rapport à sa tangente.

   Pour cela on regarde le signe de $f(x) - y = \frac{x^3}{48} + \ o(x^3)$.

   Au voisinage de 0, $\frac{x^3}{48}$ change de signe donc la courbe de f traverse sa tangente.