Correction : ENS 2021

Problème A de ENS 2021

Dans tout le problème, ε désigne un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1$. Nous notons la limite à droite d'une fonction f en un point a par $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$. Les notations alternatives usuelles $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ sont tolérées.

1. (a) Que vaut $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx$?

   Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $[\varepsilon; 1]$ est $x \mapsto \ln(x)$, donc

   $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_\varepsilon^1 = \ln(1) - \ln(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon)$.

   $$\boxed{I(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon).}$$

   (b) Calculer la limite $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} I(\varepsilon)$.

   Par composition de limites et multiplication de limites,

   $$\boxed{\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} I(\varepsilon) = +\infty.}$$

   (c) Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx = -\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx$.

   La fonction inverse est impaire, on peut donc utiliser la symétrie de la courbe pour obtenir le résultat.

   Autre méthode, plus mathématique : on utilise le changement de variable $t = -x$.

   Les bornes -1 et $-\varepsilon$ deviennent alors 1 et ε ; l'expression à intégrer $\dfrac{1}{x}$ devient $-\dfrac{1}{t}$, et dx devient $dx = x'(t)dt = -dt$. Ainsi

   $\displaystyle\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx = \int_1^\varepsilon \left(-\frac{1}{t}\right) \times (-dt) = \int_1^\varepsilon \frac{1}{t} dt = -\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t} dt.$

   C'est ce qu'il fallait démontrer.

   (d) En déduire la valeur de $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\displaystyle\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx\right)$.

   D'après la question précédente, $\displaystyle\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = 0,$ et donc

   $$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx\right) = 0.$$

2. Soit $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

   (a) À l'aide du changement de variable $y = -x$, montrer que

   $$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x} dx = \int_\varepsilon^1 \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx.$$

   On utilise le changement de variables dans la première intégrale : les bornes -1 et $-\varepsilon$ deviennent 1 et ε ; l'expression à intégrer $\dfrac{f(x)}{x}$ devient $\dfrac{f(-y)}{-y}$; et dx devient $dx = x'(y)dy = -dy$. Ainsi

   $\displaystyle\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^\varepsilon \frac{f(-y)}{-y} \times (-dy) = \int_1^\varepsilon \frac{f(-y)}{y} dy = -\int_\varepsilon^1 \frac{f(-y)}{y} dy = -\int_\varepsilon^1 \frac{f(-x)}{x} dx.$

Alors, par linéarité de l'intégrale, on a
$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f(x)}{x}dx = -\int_{\varepsilon}^{1} \frac{f(-x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f(x)}{x}dx = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f(x)-f(-x)}{x}dx.$
C'est ce qu'on voulait démontrer.

(b) Dans le cas où f est de plus impaire, montrer que

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f(x)}{x}dx = 2\int_{\varepsilon}^{1} \frac{f(x)}{x}dx.$$

Une fonction f impaire sur $[-1;1]$ vérifie, pour tout $x \in [-1;1]$, $\quad f(-x) = -f(x)$.
La question précédente donne alors
$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f(x)}{x}dx = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f(x)-f(-x)}{x}dx = 2\int_{\varepsilon}^{1} \frac{f(x)}{x}dx.$

3. Soit a un réel strictement positif et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} x^a & \text{si } x \geq 0, \\ -|x|^a & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que f_a est continue et impaire.

Sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$, la fonction f_a est continue, par composition et multiplication de fonctions usuelles continues.
Lorsque $x > 0$ et $x \to 0$, on a $f_a(x) = x^a = \exp(a\ln(x)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ (par composition, multiplication et composition de limites, car $a > 0$).
Lorsque $x < 0$ et $x \to 0$, on a $f_a(x) = -|x|^a = -\exp(a\ln(|x|)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ (par composition, multiplication et composition de limites, car $a > 0$).
Et $f_a(0) = 0$, donc la fonction f_a est continue en 0.

Pour $x \in]0;+\infty[$, on a $-x < 0$, et donc
$f_a(-x) = -|-x|^a = -|x|^a = -x^a = -f_a(x)$ (car $x > 0$).
De même, pour $x \in]-\infty;0[$, on a $-x > 0$, et donc
$f_a(-x) = (-x)^a = |x|^a = -f_a(x)$ (car $x < 0$).
Et puisque $f_a(0) = 0$, on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_a(-x) = -f_a(x)$. Ainsi f_a est impaire.

(b) Montrer que $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_a(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f_a(x)}{x}dx = \frac{2-2\varepsilon^a}{a}$.

On utilise la question 2(*b*) sur f_a, ce qui est possible puisque f_a est impaire, continue, et définie sur $[-1;1]$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_a(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f_a(x)}{x}dx &= 2\int_{\varepsilon}^{1} \frac{f_a(x)}{x}dx \\
&= 2\int_{\varepsilon}^{1} \frac{x^a}{x}dx \quad (\text{puisque } x > 0 \text{ sur } [\varepsilon;1]) \\
&= 2\int_{\varepsilon}^{1} x^{a-1}dx \\
&= 2 \times \left[\frac{x^a}{a}\right]_{\varepsilon}^{1} \quad (\text{valable car } a \neq 0) \\
&= 2 \times \left(\frac{1}{a} - \frac{\varepsilon^a}{a}\right) \\
&= \frac{2-2\varepsilon^a}{a}.
\end{aligned}$$

C'est ce qu'on voulait démontrer.

(c) Calculer $I(a) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_a(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f_a(x)}{x} dx \right)$, puis $\lim\limits_{\substack{a\to 0\\ a>0}} I(a)$.

On utilise le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} I(a) &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_a(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f_a(x)}{x} dx \right) \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\frac{2-2\varepsilon^a}{a} \right) \\ &= \frac{2}{a}. \end{aligned}$$

(par composition, soustraction et quotient de limites)

Puis, $\lim\limits_{\substack{a\to 0\\ a>0}} I(a) = +\infty$. (par quotient de limites)

(d) En déduire qu'il n'existe pas de constante C telle que, pour toute fonction continue $g : [-1;1] \to \mathbb{R}$, on ait

$$\left| \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{g(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{g(x)}{x} dx \right) \right| \leq C \sup_{x\in[-1;1]} |g(x)|.$$

Raisonnons par l'aburde. Si tel était le cas, alors le résultat devrait être valable pour toute fonction continue $g : [-1;1] \to \mathbb{R}$, et donc notamment pour les fonction f_a, et ce quelque soit $a > 0$.

Mais pour ces fonctions-là, on a

$$\left| \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_a(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{f_a(x)}{x} dx \right) \right| = \frac{2}{a}, \quad \text{et} \quad \sup_{x\in[-1;1]} |f_a(x)| = 1.$$

(car, lorsque $x \in [0;1]$, on a $x^a \in [0;1]$, et lorsque $x \in [-1;0]$, on a $-|x|^a \in [-1;0]$)

On aurait donc $\frac{2}{a} \leq C$, et ce pour toute valeur de $a > 0$. Notamment, on aurait $C > 0$, et cette constante C vérifierait $a \geq \frac{2}{C}$ pour tout $a > 0$. C'est absurde. (notamment pour $a = \frac{1}{C}$, par exemple)

Ainsi, une telle constante n'existe pas. C'est ce qu'on voulait démontrer.

4. Soit $h : [-1;1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) Justifier qu'il existe $y_0 \in [-1;1]$ tel que $|h'(y_0)| = \max\limits_{y\in[-1;1]} |h'(y)|$.

La fonction h' est continue sur $[-1;1]$ d'après l'énoncé (puisque h est de classe $\mathcal{C}^1$, et donc la fonction $|h'|$ aussi (par composition de fonctions continues).

Le théorème des valeurs intermédiaires nous indique donc que les images de $|h'|$ sur $[-1;1]$ forment un segment. Notamment, la fonction $|h'|$ atteint son maximum sur $[-1;1]$.

Il existe donc $y_0 \in [-1;1]$ tel que $|h'(y_0)| = \max\limits_{y\in[-1;1]} |h'(y)|$.

(b) Justifier que, pour tout $x \in [0;1]$, on a $|h(x) - h(-x)| \leq 2x \max\limits_{y\in[-x;x]} |h'(y)|$.

On utilise l'inégalité des accroissements finis sur la fonction h et sur l'intervalle $[-x;x]$, qui est bien valable puisque h est continue sur $[-x;x]$ et dérivable sur $]-x;x[$. Cela donne

$|h(x) - h(-x)| \leq |x - (-x)| \times \max\limits_{y\in[-x;x]} |h'(y)|$.

On a donc directement le résultat, puisque $|x - (-x)| = 2x$ (car $x \geq 0$).

(c) Montrer que, pour tout $\varepsilon \in]0;1[$,

$$\int_{\varepsilon}^{1} \left| \frac{h(x) - h(-x)}{x} \right| dx \leq 2 \left| h'(y_0) \right|.$$

Les deux questions précédentes donnent, pour $x \in [0;1]$,
$|h(x) - h(-x)| \leq 2x\,|h'(y_0)|$.
Ainsi, pour $x \in [\varepsilon;1]$, on aura $x > 0$ et donc
$\dfrac{|h(x) - h(-x)|}{x} \leq 2\,|h'(y_0)|$,
autrement dit
$\left|\dfrac{h(x) - h(-x)}{x}\right| \leq 2\,|h'(y_0)|$
puisque $x > 0$. Par croissance de l'intégrale, on obtient alors
$$\int_{\varepsilon}^{1} \left|\frac{h(x) - h(-x)}{x}\right| dx \leq \int_{\varepsilon}^{1} 2\left|h'(y_0)\right| dx = 2\left|h'(y_0)\right| \times (1-\varepsilon) \leq 2\left|h'(y_0)\right|$$
(puisque $\varepsilon \in]0;1[$). C'est ce qu'on voulait démontrer.

(d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \left|\frac{h(x) - h(-x)}{x}\right| dx$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante, puisque
$$u_{n+1} - u_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left|\frac{h(x) - h(-x)}{x}\right| dx \geq 0$$
(relation de Chasles). Or, cette suite est également majorée (par $2\,|h'(y_0)|$) d'après la question précédente. La suite converge donc vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Soit $h : [-1;1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{h(x) - h(-x)}{x} = 2h'(0)$.

$\dfrac{h(x) - h(-x)}{x} = \dfrac{h(x) - h(0) + h(0) - h(-x)}{x} = \dfrac{h(x) - h(0)}{x} + \dfrac{h(-x) - h(0)}{-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} h'(0) + h'(0) = 2h'(0)$.

C'est ce qu'on voulait démontrer.

Note : on a $\dfrac{h(-x) - h(0)}{-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} h'(0)$ car, lorsque $x \to 0$, on a aussi $-x \to 0$.

Problème B

6. (a) Posons $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$.

   • Montrons que $\mathcal{V}$ est libre. Soit $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

On en déduit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & - & 2\lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

Alors :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & -3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftrightarrow L_2$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ & & -3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 11\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

On a donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

   • $\mathcal{V}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ de cardinal $3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On observe que :

$$x \in H \iff \exists\,(\lambda_1,\ \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ x = \lambda_1\,(v_2 - v_1) + \lambda_2\,(v_3 - v_2) \iff x \in \operatorname{Vect}(v_2 - v_1,\ v_3 - v_2)$$

Ainsi $H = \operatorname{Vect}(v_2 - v_1,\ v_3 - v_2)$, donc H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(c) On a :

$$\begin{array}{lll} u_{1,1} = 0 & u_{1,2} = v_1 - v_2 & u_{1,3} = v_1 - v_3 \\ u_{2,1} = v_2 - v_1 & u_{2,2} = 0 & u_{2,3} = v_2 - v_3 \\ u_{3,1} = v_3 - v_1 & u_{3,2} = v_3 - v_2 & u_{3,3} = 0 \end{array}$$

(d) On a :

$$\begin{aligned} E_3 &= \operatorname{Vect}(u_{i,j},\ (i,\ j) \in [\![1,3]\!]^2) \\ &= \operatorname{Vect}(u_{1,1},\ u_{1,2},\ u_{1,3},\ u_{2,1},\ u_{2,2},\ u_{2,3},\ u_{3,1},\ u_{3,2},\ u_{3,3}) \\ &= \operatorname{Vect}(u_{2,1},\ u_{3,2},\ u_{1,3}) \\ &= \operatorname{Vect}(v_2 - v_1,\ v_3 - v_2,\ v_3 - v_1) \end{aligned}$$

En effet $u_{1,1} = u_{2,2} = u_{3,3} = 0$, $u_{1,2} = -u_{2,1}$, $u_{1,3} = -u_{3,1}$ et $u_{2,3} = -u_{3,2}$. On observe de plus que :

$$v_3 - v_1 = (v_3 - v_2) + (v_2 - v_1)$$

donc :

$$E_3 = \operatorname{Vect}(v_2 - v_1,\ v_3 - v_2) = H$$

La famille $\mathcal{V}' = (v_2 - v_1,\ v_3 - v_2)$ est donc génératrice dans E_3. Montrons qu'elle est libre. Pour cela prenons $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2) = 0$$

On a alors :

$$-\lambda_1 v_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)v_2 + \lambda_2 v_3 = 0$$

Comme la famille $\mathcal{V}$ est libre, on en déduit que :

$$\begin{cases} -\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ainsi $\mathcal{V}'$ est une base de E_3 donc $\dim E_3 = \operatorname{card}(\mathcal{V}') = 2$.

7. Dans cette question, on va noter $\mathcal{W}$ la famille $(w_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $\mathcal{W}'$ la famille $(w_{1,2},\, w_{1,3},\, \ldots,\, w_{1,n})$. Observons que $\mathcal{W}'$ est extraite de $\mathcal{W}$.

   (a) $*$ Si $i = j$, alors $w_{i,j} = w_{i,i} = v_i - v_i = 0$.

   $*$ Si $w_{i,j} = 0$, alors $v_i - v_j = 0$ donc $v_i = v_j$. Si $i \neq j$, alors la famille $\mathcal{V}$ contient deux vecteurs égaux, donc elle est liée, ce qui est absurde. On a donc $i = j$.

   (b) E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, donc $\dim E \leqslant \dim \mathbb{R}^n$ soit $\dim E \leqslant n$.

   (c) Montrons que $(w_{1,2},\, w_{1,3},\, \ldots,\, w_{1,n})$ est libre.

   Soit $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda_2 w_{1,2} + \lambda_3 w_{1,3} + \cdots + \lambda_n w_{1,n} = 0$$

   Par suite :

$$\lambda_2(v_1 - v_2) + \lambda_3(v_1 - v_3) + \cdots + \lambda_n(v_1 - v_n) = 0$$

   Ainsi :

$$(\lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n)v_1 - \lambda_2 v_2 - \lambda_3 v_3 - \cdots - \lambda_n v_n = 0$$

   Comme $\mathcal{V}$ est libre on en déduit :

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \\ -\lambda_3 = 0 \\ \quad\vdots \\ -\lambda_n = 0 \end{cases}$$

   donc $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$.

   (d) Soient i et j deux entiers de $[\![1, n]\!]$. On a :

$$w_{i,j} = v_i - v_j = (v_1 - v_j) - (v_1 - v_i) = w_{1,j} - w_{1,i}$$

   - Si $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$, cette écriture répond à la question.
   - Si $i = 1$ et $j \geqslant 2$, alors $w_{i,j} = w_{1,j}$ est un vecteur de la famille $\mathcal{W}'$.
   - Si $i \geqslant 2$ et $j = 1$, alors $w_{i,j} = w_{i,1} = -w_{1,i}$
   - Si $i = j = 1$, alors $w_{i,j} = 0$.

   (e) • Comme $\mathcal{W}'$ est extraite de $\mathcal{W}$, alors $\operatorname{Vect}(\mathcal{W}') \subset \operatorname{Vect}(\mathcal{W})$.

   • Dans la question (d), on a montré que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad w_{i,j} \in \operatorname{Vect}(\mathcal{W}')$$

   On en déduit que $\operatorname{Vect}(\mathcal{W}) \subset \operatorname{Vect}(\mathcal{W}')$.

   • Finalement, on a $\operatorname{Vect}(\mathcal{W}) = \operatorname{Vect}(\mathcal{W}')$ soit $E = \operatorname{Vect}(\mathcal{W}')$. Alors :

$$\dim E = \dim \operatorname{Vect}(\mathcal{W}') = \operatorname{rg}(\mathcal{W}')$$

   Comme la famille $\mathcal{W}'$ est libre de cardinal $n - 1$, on a $\operatorname{rg}(\mathcal{W}') = n - 1$. Finalement :

$$\boxed{\dim E = n - 1}$$

8. On note $\mathcal{Z}$ la famille $(z_{i,\,j})_{(i,\,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. D'après l'énoncé, on a $F = \text{Vect}\,(\mathcal{Z})$.

   (a) • Si $a = 1$ et $b = 0$, alors pour tout $(i,\,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $z_{i,\,j} = v_i$. Ceci montre que la famille $\mathcal{V}$ est extraite de $\mathcal{Z}$. Comme $\mathcal{V}$ engendre $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{Z}$ engendre également $\mathbb{R}^n$, donc $F = \text{Vect}\,(\mathcal{Z}) = \mathbb{R}^n$.

   • Si $a = 0$ et $b = 0$, alors pour tout $(i,\,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $z_{i,\,j} = 0$. Alors $F = \text{Vect}\,(\mathcal{Z}) = \{0\}$ donc $F \neq \mathbb{R}^n$ puisque $n \geqslant 1$.

   (b) On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ et l'on a :

$$M \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det M \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - b^2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \neq b^2$$

   (c) On suppose $a^2 \neq b^2$. Soit $\lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda z_{1,\,2} + \mu z_{2,\,1} = v_1 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda(av_1 + bv_2) + \mu(av_2 + bv_1) = v_1 \\
&\Leftrightarrow \quad (\lambda a + \mu b)v_1 + (\lambda b + \mu a)v_2 = v_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda a + \mu b = 1 \\ \lambda b + \mu a = 0 \end{cases} \qquad \text{car } (v_1,\, v_2) \text{ est libre} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   La dernière étape est possible puisque la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ est inversible étant donné que $a^2 \neq b^2$. On sait de plus que dans ce cas :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

   Ainsi :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

   Finalement :

$$\boxed{\lambda z_{1,\,2} + \mu z_{2,\,1} = v_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{a}{a^2 - b^2} \\ \mu = -\dfrac{b}{a^2 - b^2} \end{cases}}$$

   (d) On suppose que $a^2 \neq b^2$. La question précédente nous apprend que :

$$v_1 \in \text{Vect}\,(\mathcal{Z})$$

   En faisant un raisonnement similaire, on peut montrer que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad v_i \in \text{Vect}\,(\mathcal{Z})$$

   On en déduit que $\text{Vect}\,(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(\mathcal{Z})$ soit $\mathbb{R}^n \subset F$. Comme F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on a bien $F = \mathbb{R}^n$.

   (e) Supposons que $a^2 = b^2$. On a alors $a = b$ ou $a = -b$.

   • Si $a = 0$, alors $b = 0$ donc $z_{i,\,j} = 0$ pour tout $(i,\,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Dans ce cas $F = \{0\}$.

   • Si $a = b$ et $a \neq 0$, alors :

$$\forall i,\, j \in [\![1,n]\!], \quad z_{i,\,j} = av_i + av_j = a(v_i + v_j)$$

En particulier :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad z_{i,\,i} = 2av_i \quad \text{donc} \quad v_i = \frac{1}{2a}\, z_{i,\,i}$$

Ainsi :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ v_i \in \mathrm{Vect}\,(\mathcal{Z})$$

On en déduit que $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}\,(\mathcal{Z})$, puis, comme dans la question précédente, que $F = \mathbb{R}^n$.

- Si $a = -b$ et $a \neq 0$, alors :

$$\forall i,\, j \in [\![1, n]\!], \quad z_{i,\,j} = av_i - av_j = a(v_i - v_j)$$

Comme $a \neq 0$, on est ramené au cas étudié dans la partie II. Dans ce cas $F = E$, avec $\dim E = n - 1$ donc $F \neq \mathbb{R}^n$.

Problème C de ENS 2021

Ce problème comporte deux parties.

Partie I. Sot $n \geq 2$ un entier naturel et soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur l'ensemble d'entiers $\{1; 2; \cdots; n\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire $X = \min(X_1; X_2)$, minimum entre X_1 et X_2.

9. (a) $P(X_1 = 1) = \frac{1}{n}$.

(b) On a $\{X = n\} = \{X_1 = n\} \cap \{X_2 = n\}$ donc, par indépendance,

$$P(X = n) = P(X_1 = n)P(X_2 = n) = \frac{1}{n^2}.$$

(c) Comme $n \neq 1$, on a $\{X_1 = 1\} \cap \{X_1 = n\} = \emptyset$ donc

$$\{X_1 = 1\} \cap \{X = n\} = \{X_1 = 1\} \cap \{X_1 = n\} \cap \{X_2 = n\} = \emptyset.$$

Ainsi les évènements $\{X = n\}$ et $\{X_1 = 1\}$ sont incompatibles.

(d)

$$P(\{X_1 = 1\} \cap \{X = n\}) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{n^3} = P(X_1 = 1)P(X = n)$$

donc X et X_1 ne sont pas indépendantes.

10. (a) Soit $k \in \{1; 2; \cdots; n\}$. Par définition de la loi uniforme

$$P(X_1 \geq k) = P(X_1 \in \{k; k+1; \cdots; n\}) = \frac{\text{card}(\{k; k+1; \cdots; n\})}{n} = \frac{n-k+1}{n}.$$

Ensuite, $\{X \geq k\} = \{X_1 \geq k\} \cap \{X_2 \geq k\}$ donc, par indépendance, on a

$$P(X \geq k) = P(X_1 \geq k)\, P(X_2 \geq k) = \frac{(n-k+1)^2}{n^2}.$$

(b) Soit $k \in \{1; \cdots; n-1\}$. On a l'union disjointe $\{X \geq k\} = \{X \geq k+1\} \uplus \{X = k\}$ donc

$$P(X \geq k) = P(X \geq k+1) + P(X = k),$$

$$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1).$$

Comme $k+1 \in \{1; \cdots; n\}$, on peut appliquer la réponse du 10 (a) :

$$P(X = k) = \frac{(n-k+1)^2 - (n-k)^2}{n^2} = \frac{2(n-k)+1}{n^2}.$$

Ce n'est pas demandé mais la formule reste vraie pour $k = n$, c'est utile pour la suite.

11. (a) On peut procéder par récurrence. On peut aussi écrire la somme cherchée comme :

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1.$$

Donc

$$2S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) = n(n+1).$$

Donc

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pour rédiger ceci formellement, on fait le changement d'indice $k' = n - k + 1$ dans la somme

$$S = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (n-k+1).$$

Donc

$$2S = \sum_{k=1}^{n} (k + n - k + 1) = \sum_{k=1}^{n} (n+1) = n(n+1).$$

Donc

$$S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) Par transfert,

$$E(X_1)=\sum_{k=1}^{n}kP(X_1=k)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n+1}{2}.$$

Ainsi,

$$\frac{E(X_1)}{n}=\frac{n+1}{2n}\sim\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{E(X_1)}{n}=\frac{1}{2}$.

(c) Par transfert,

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{2(n-k)+1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\left((2n+1)\sum_{k=1}^{n}k-2\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\left((2n+1)\frac{n(n+1)}{2}-2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=\frac{(2n+1)n(n+1)}{6n^2}=\frac{(2n+1)(n+1)}{6n}.\end{aligned}$$

(d) $\dfrac{E(X)}{n}\sim\frac{2n^2}{6n^2}=\frac{1}{3}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{E(X)}{n}=\frac{1}{3}$.

On considère dorénavant deux nombres réels strictement positifs λ_1 et λ_2, ainsi que deux variables aléatoires T_1 et T_2 indépendantes, T_1 suivant la loi exponentielle de paramètre λ_1, et T_2 suivant la loi exponentielle de paramètre λ_2. On s'intéresse à $T=\min(T_1;T_2)$.

12. (a) $P(T_1>x)=1$ si $x<0$ et $P(T_1>x)=e^{-\lambda_1 x}$ si $x\geq 0$.

(b) Pour $x\geq 0$, par indépendance, on a

$$P(T>x)=P(\{T_1>x\}\cap\{T_2>x\})=P(T_1>x)\,P(T_2>x)=e^{-\lambda_1 x}e^{-\lambda_2 x}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}.$$

(c) Pour $x<0$, $P(T>x)=P(T_1>x)\,P(T_2>x)=1$. La fonction $Q:x\mapsto P(T>x)$ détermine la fonction de répartition de T ($F=1-Q$) donc sa loi. Ainsi T suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1+\lambda_2$.

Partie II. Soit $m\geq 1$ un entier naturel. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{1;\cdots;m\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire Z de loi uniforme sur $\{1;\cdots;Y\}$. L'ensemble sur lequel Z est définie est donc aléatoire : par exemple, si la réalisation de Y donne 3, alors Z est uniforme sur $\{1;2;3\}$, tandis que si la réalisation de Y donne 5, alors Z est uniforme sur $\{1;2;3;4;5\}$, et ainsi de suite.

Remarque : l'énoncé est assez mal rédigé. Il confond l'ensemble sur lequel Z est définie et l'ensemble des valeurs que prend Z. L'ensemble sur lequel Z est définie est l'univers Ω sous-jacent : il n'est pas aléatoire. La phrase ≪ la variable aléatoire Z de loi uniforme sur $\{1;\cdots;Y\}$ ≫ est incorrecte : c'est la loi *conditionnelle* de Z sachant Y qui est uniforme sur $\{1;\cdots;Y\}$.

13. Dans ce cas, Z suit la loi uniforme sur $\{1;\cdots;k\}$. Donc $E(Z)=\frac{k+1}{2}$.

On suppose dans toute la suite que, pour tout $k\in\{1;\cdots;m\}$, on a $P(Y=k)>0$.

14. (a) Si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille complète d'évènements (de probabilités strictement positives) et si B est un évènement alors

$$P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)P_{A_k}(B).$$

(b) $(\{Y=k\})_{1\leq k\leq m}$ est une famille complète d'évènements donc

$$P(Z=\ell)=\sum_{k=1}^{m}P(Y=k)\,P_{Y=k}(Z=\ell).$$

Sachant $Y=k$, Z suit la loi uniforme sur $\{1;\cdots;k\}$ donc $P_{Y=k}(Z=\ell)=0$ si $k<\ell$ et $P_{Y=k}(Z=\ell)=\frac{1}{k}$ si $k\geq\ell$. Donc

$$P\left(Z=\ell\right)=\sum_{k=\ell}^{m}\frac{P(Y=k)}{k}.$$

(c) Pour $\ell\in\{1;\cdots;m\}$,

$$P\left(Z=\ell\right)=\sum_{k=\ell}^{m}kP\left(Y=k\right)\frac{1}{k^2}.$$

Dans la somme, on a $k\geq\ell$ donc $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{\ell^2}$. Comme $kP\left(Y=k\right)\geq 0$, on multiplie les inégalités et on somme

$$P\left(Z=\ell\right)\leq\frac{1}{\ell^2}\sum_{k=\ell}^{m}kP\left(Y=k\right)\leq\frac{1}{\ell^2}\sum_{k=1}^{m}kP\left(Y=k\right)=\frac{E(Y)}{\ell^2}.$$

.

15. **Dans cette question seulement**, on suppose que la loi de Y est donnée par la formule $P\left(Y=k\right)=\dfrac{2k}{m(m+1)}$ pour $k\in\{1;\cdots;m\}$.

(a) Pour $\ell\in\{1;\cdots;m\}$,

$$P\left(Z=\ell\right)=\sum_{k=\ell}^{m}\frac{P(Y=k)}{k}=\sum_{k=\ell}^{m}\frac{2}{m(m+1)}=\frac{2(m-\ell+1)}{m(m+1)}.$$

(b) Pour $1\leq\ell\leq k\leq m$,

$$P\left(Y=k|Z=\ell\right)=\frac{P\left(\{Y=k\}\cap\{Z=\ell\}\right)}{P(Z=\ell)}=\frac{P(Y=k)P_{Y=k}(Z=\ell)}{P(Z=\ell)}=\frac{1}{m-\ell+1}.$$

16. (a) On considère des nombres réels positifs $\{a_{k,\ell},\ 1\leq k\leq m,\ 1\leq\ell\leq m\}$. On considère la double somme $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{k=\ell}^{m}a_{k,\ell}$. Recopier le tableau ci-dessous en cochant ou noircissant les cases correspondant aux indices k et ℓ pour lesquels le terme $a_{k,\ell}$ apparait dans cette double somme.

	$\ell=1$	$\ell=2$	$\ell=3$	$\ell=4$	$\ell=m$
$k=1$	■				
$k=2$	■	■			
$k=3$	■	■	■		
$k=4$	■	■	■	■	
$k=m$	■	■	■	■	■

La somme de gauche somme d'abord sur chaque colonne puis somme les résultats obtenus. La somme de droite somme d'abord sur chaque ligne puis somme les résultats obtenus. Ces sommes sont les sommes de tous les termes du tableau donc sont les mêmes : $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{k=\ell}^{m}a_{k,\ell}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{k}a_{k,\ell}$.

(b) Par transfert

$$\begin{aligned}E(Z) &= \sum_{\ell=1}^{m}\ell P(Z=\ell)=\sum_{\ell=1}^{m}\ell\sum_{k=\ell}^{m}\frac{P(Y=k)}{k}=\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{k=\ell}^{m}\ell\frac{P(Y=k)}{k}\\ &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{k}\ell\frac{P(Y=k)}{k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{P(Y=k)}{k}\sum_{\ell=1}^{k}\ell\\ &= \sum_{k=1}^{m}\frac{P(Y=k)}{k}\frac{k(k+1)}{2}=\sum_{k=1}^{m}P(Y=k)\frac{k+1}{2}.\end{aligned}$$

(c) Par transfert, on a

$$E(Z) = E(\frac{Y+1}{2}) = \frac{E(Y)+1}{2}.$$

(d) De manière analogue,

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \sum_{k=1}^{m} \frac{P(Y=k)}{k} \sum_{\ell=1}^{k} \ell^2 = \sum_{k=1}^{m} P(Y=k) \frac{(k+1)(2k+1)}{6} \\ &= E\left(\frac{(Y+1)(2Y+1)}{6} \right) = \frac{2E(Y^2)+3E(Y)+1}{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(Z) &= E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{2E(Y^2)+3E(Y)+1}{6} - \frac{E(Y)^2+2E(Y)+1}{4} \\ &= \frac{4E(Y^2)-3E(Y)^2-1}{12} = \frac{E(Y^2)+3V(Y)-1}{12}. \end{aligned}$$

SI $m=1$, la réponse est trivialement oui puisque $Y=Z=1$ et alors $V(Y)=V(Z)=0$. SI $m \geq 2$, il n'existe aucune fonction f telle que, pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\{1, \ldots, m\}$, on ait $E(Y^2) = f(V(Y))$. Donc la réponse à la question est non. Pour prouver l'affirmation précédente, il suffit de raisonner par l'absurde et de prendre Y constante égale à 1 puis Y constante égale à 2 pour avoir $f(0) = E(1^2) = E(2^2) = 1 = 4$: absurde !

On suppose dorénavant que Y est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels strictement positifs, telle que $Y-1$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose toujours que Z est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1; \cdots; Y\}$.

17. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y=k) = P(Y-1=k-1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

(b) Même raisonnement qu'au 14 (b) avec la famille complète d'évènements $(\{Y=k\})_{k \in \mathbb{N}^*}$ donnant lieu à la somme d'une série

$$P(Z=\ell) = \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{P(Y=k)}{k}.$$

(c)

$$\begin{aligned} P(Z=1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(Y=k)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!k} \\ &= e^{-\lambda} \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - 1 \right) \\ &= e^{-\lambda} \lambda^{-1} \left(e^{\lambda} - 1 \right) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}. \end{aligned}$$

Remarque. Si l'on est familier avec le concept d'espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire, certaines questions se résolvent plus simplement : la loi conditionnelle de Z sachant Y est uniforme sur $\{1, \cdots, Y\}$ donc

$$E(Z|Y) = \frac{Y+1}{2},\ V(Z|Y) = \frac{Y^2-1}{12},$$

$$E(Z) = E(E(Z|Y)) = E\left(\frac{Y+1}{2}\right) = \frac{E(Y)+1}{2},$$

$$V(Z) = E(V(Z|Y)) + V(E(Z|Y)) = \frac{E(Y^2)-1}{12} + \frac{V(Y)}{4} = \frac{E(Y^2)+3V(Y)-1}{12}.$$

Pour définir $E(Z|Y)$, on évoque en général une projection orthogonale sur un sous-espace fermé de l' espace de Hilbert des variables aléatoires ayant un moment d'ordre deux. Dans le cas discret comme ici, la définition peut être très simple : $E(Z|Y) = g(Y)$ avec

$$\forall k,\ g(k) = E(Z|Y = k) = \sum_{i \in Z(\Omega)} iP(Z = i|Y = k).$$

Poursuite du problème. On répète le mécanisme de choisir uniformément un entier entre 1 et le précédent : partons de X_0 à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi *conditionnelle* de X_{n+1} sachant $X_0, \ldots, X_n$ est uniforme sur $\{1, \cdots, X_n\}$.

1. Montrer qu'avec probabilité 1, la suite (X_n) stationne à 1 à partir d'un certain rang.
2. En moyenne, combien faut-il de temps pour atteindre 1 ? Précisément, notons $T = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = 1\}$ et $u_k = E_{X_0=k}(T)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ (espérance de T sachant que l'on démarre à $X_0 = cte = k$). Montrer que u_k existe et déterminer un équivalent de u_k quand $k \to +\infty$.