Problème A de ENS 2021

Dans tout le problème, ε désigne un nombre réel tel que $0 < \varepsilon < 1$. Nous notons la limite à droite d'une fonction f en un point a par $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$. Les notations alternatives usuelles $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ sont tolérées.

1. (a) Que vaut $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx$?

   (b) Calculer la limite $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} I(\varepsilon)$.

   (c) Justifier que $\displaystyle\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx = -\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx$.

   (d) En déduire la valeur de $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\displaystyle\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx \right)$.

2. Soit $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

   (a) À l'aide du changement de variable $y = -x$, montrer que

   $$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x} dx = \int_\varepsilon^1 \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx.$$

   (b) Dans le cas où f est de plus impaire, montrer que

   $$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x} dx = 2 \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x} dx.$$

3. Soit a un réel strictement positif et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f_a(x) = \begin{cases} x^a & \text{si } x \geq 0, \\ -|x|^a & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   (a) Montrer que f_a est continue et impaire.

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_a(x)}{x} dx + \int_\varepsilon^1 \frac{f_a(x)}{x} dx = \frac{2 - 2\varepsilon^a}{a}$.

   (c) Calculer $I(a) = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\displaystyle\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{f_a(x)}{x} dx + \int_\varepsilon^1 \frac{f_a(x)}{x} dx \right)$, puis $\lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ a > 0}} I(a)$.

   (d) En déduire qu'il n'existe pas de constante C telle que, pour toute fonction continue $g : [-1; 1] \to \mathbb{R}$, on ait

   $$\left| \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{g(x)}{x} dx + \int_\varepsilon^1 \frac{g(x)}{x} dx \right) \right| \leq C \sup_{x \in [-1;1]} |g(x)| .$$

4. Soit $h : [-1; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

   (a) Justifier qu'il existe $y_0 \in [-1; 1]$ tel que $|h'(y_0)| = \max\limits_{y \in [-1;1]} |h'(y)|$.

   (b) Justifier que, pour tout $x \in [0; 1]$, on a $|h(x) - h(-x)| \leq 2x \max\limits_{y \in [-x;x]} |h'(y)|$.

   (c) Montrer que, pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$,

   $$\int_\varepsilon^1 \left| \frac{h(x) - h(-x)}{x} \right| dx \leq 2 \left| h'(y_0) \right| .$$

   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général $u_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 \left| \frac{h(x) - h(-x)}{x} \right| dx$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Soit $h : [-1; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x) - h(-x)}{x} = 2h'(0)$.

Problème B de ENS 2021

6. Pour cette question, soient $v_1 = (1; -1; 0)$, $v_2 = (-1; -2; 1)$ et $v_3 = (2; 0; 3)$.

(a) Montrer que la famille $(v_1; v_2; v_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Montrer que $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : \exists (\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, x = \lambda_1 (v_2 - v_1) + \lambda_2 (v_3 - v_2)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Pour tout $i \in \{1; 2; 3\}$ et tout $j \in \{1; 2; 3\}$, on définit le vecteur $u_{i,j} = v_i - v_j$. On note E_3 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $(u_{i,j})_{1\leq i\leq 3, 1\leq j\leq 3}$.

(c) Donner la liste des vecteurs $u_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$.

(d) Que vaut $\dim(E_3)$?

Dans toute la suite du problème, $n \geq 1$ désigne un entier naturel quelconque et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que la famille $(v_1; v_2; \ldots; v_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$.

7. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit $w_{i,j} = v_i - v_j$. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par la famille $(w_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$. Le but de cette question est de trouver la dimension de E.

   (a) Montrer que $w_{i,j}$ est le vecteur nul si et seulement si $i = j$.

   (b) Justifier que E est de dimension inférieure ou égale à n.

   (c) Montrer que la famille $(w_{1,2}; w_{1,3}; w_{1,4}; \cdots; w_{1,n})$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

   (d) Soient i et j deux entiers dans $\{1; \cdots; n\}$; exprimer le vecteur $w_{i,j}$ en fonction des vecteurs $w_{1,2}$, $w_{1,3}$, $w_{1,4}$, …, $w_{1,n}$.

   (e) Quelle est la dimension de E ?

8. Soient a et b deux nombres réels. Pour tout $i \in \{1; \cdots; n\}$ et tout $j \in \{1; \cdots; n\}$, on définit $z_{i,j} = av_i + bv_j$. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par la famille $(z_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$. Le but de cette question est de trouver dans quels cas $F = \mathbb{R}^n$.

   (a) Donner un exemple simple de nombres réels a et b pour lequel $F = \mathbb{R}^n$ et un exemple pour lequel $F \neq \mathbb{R}^n$.

   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ soit inversible.

   (c) On suppose $a^2 \neq b^2$. Trouver deux nombres réels λ et μ tels que $\lambda z_{1,2} + \mu z_{2,1} = v_1$.

   (d) En déduire que, si $a^2 \neq b^2$, alors $F = \mathbb{R}^n$.

   (e) Que pensez-vous du cas $a^2 = b^2$?

Problème C de ENS 2021

Ce problème comporte deux parties.

Partie I. Sot $n \geq 2$ un entier naturel et soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur l'ensemble d'entiers $\{1; 2; \cdots; n\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire $X = \min(X_1; X_2)$, minimum entre X_1 et X_2.

9. (a) Que vaut $P(X_1 = 1)$, la probabilité de l'évènement $\{X_1 = 1\}$?

   (b) Calculer $P(X = n)$.

   (c) Montrer que les évènements $\{X = n\}$ et $\{X_1 = 1\}$ sont incompatibles.

   (d) En déduire que X et X_1 ne sont pas indépendantes.

10. (a) Soit $k \in \{1; 2; \cdots; n\}$. Montrer que $P(X \geq k) = \dfrac{(n-k+1)^2}{n^2}$.

    (b) Soit $k \in \{1; \cdots; n-1\}$. Que vaut $P(X = k)$?

11. (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

    (b) En déduire la valeur de l'espérance $E(X_1)$ puis calculer la limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{E(X_1)}{n}$.

    (c) On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrer que $E(X) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

    (d) Calculer la limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{E(X)}{n}$.

On considère dorénavant deux nombres réels strictement positifs λ_1 et λ_2, ainsi que deux variables aléatoires T_1 et T_2 indépendantes, T_1 suivant la loi exponentielle de paramètre λ_1, et T_2 suivant la loi exponentielle de paramètre λ_2. On s'intéresse à $T = \min(T_1; T_2)$.

12. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, que vaut $P(T_1 > x)$?

(b) Pour $x \geq 0$, que vaut $P(T > x)$?

(c) Quelle est la loi de T ?

Partie II. Soit $m \geq 1$ un entier naturel. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{1; \cdots; m\}$. On s'intéresse à la variable aléatoire Z de loi uniforme sur $\{1; \cdots; Y\}$. L'ensemble sur lequel Z est définie est donc aléatoire : par exemple, si la réalisation de Y donne 3, alors Z est uniforme sur $\{1; 2; 3\}$, tandis que si la réalisation de Y donne 5, alors Z est uniforme sur $\{1; 2; 3; 4; 5\}$, et ainsi de suite.

13. **Dans cette question seulement**, on suppose qu'il existe un $k \in \{1; \cdots; m\}$ tel que $P(Y = k) = 1$. Quelle est la loi de Z ? Donner, sans justification, son espérance $E(Z)$.

On suppose dans toute la suite que, pour tout $k \in \{1; \cdots; m\}$, on a $P(Y = k) > 0$.

14. (a) Énoncer la formule des probabilités totales.

(b) Montrer que, pour tout $\ell \in \{1; \cdots; m\}$,

$$P(Z = \ell) = \sum_{k=\ell}^{m} \frac{P(Y = k)}{k}.$$

(c) Pour $\ell \in \{1; \cdots; m\}$, montrer que $P(Z = \ell) \leq \frac{E(Y)}{\ell^2}$.

15. **Dans cette question seulement**, on suppose que la loi de Y est donnée par la formule $P(Y = k) = \frac{2k}{m(m+1)}$ pour $k \in \{1; \cdots; m\}$.

(a) Pour $\ell \in \{1; \cdots; m\}$, que vaut $P(Z = \ell)$ dans ce cas ?

(b) Pour $1 \leq \ell \leq k \leq m$, calculer $P(Y = k | Z = \ell)$.

16. (a) On considère des nombres réels positifs $\{a_{k,\ell},\ 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq \ell \leq m\}$. On considère la double somme $\sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=\ell}^{m} a_{k,\ell}$. Recopier le tableau ci-dessous en cochant ou noircissant les cases correspondant aux indices k et ℓ pour lesquels le terme $a_{k,\ell}$ apparait dans cette double somme.

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ell = m$
$k = 1$					
$k = 2$					
$k = 3$					
$k = 4$					
$k = m$					

Expliquer pourquoi $\sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=\ell}^{m} a_{k,\ell} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{k} a_{k,\ell}$.

(b) Montrer que $E(Z) = \sum_{k=1}^{m} P(Y = k) \frac{k+1}{2}$.

(c) Exprimer l'espérance de Z en fonction de celle de Y.

(d) Est-il possible d'exprimer la variance de Z uniquement en fonction de la variance de Y ?

On suppose dorénavant que Y est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels strictement positifs, telle que $Y - 1$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose toujours que Z est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1; \cdots; Y\}$.

17. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, que vaut $P(Y = k)$?

(b) Montrer que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Z = \ell) = \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{P(Y = k)}{k}.$$

(c) Calculer $P(Z = 1)$.