ENS 2020

Problème A

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre réel.
   (a) Exprimer de deux façons différentes les parties réelle et imaginaire de $\left(e^{i\theta}\right)^2$.
   (b) En déduire que
$$\cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$$

2. On considère la fonction d'une variable réelle $\varphi : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.
   (a) Quel est son domaine de définition ?
   (b) Montrer que son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
   (c) Justifier que φ est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer $\lim_{x\to -1} \varphi'(x)$.
   (d) Tracer le graphe de φ en faisant apparaitre les informations des questions précédentes.

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi uniforme dans $[0,1]$. On admet que, pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$, la probabilité de l'événement $[(X,Y) \in A]$ est donnée par l'aire de l'ensemble $A \cap [0,1]^2$.

3. Pour tout réel positif r, on définit l'ensemble
$$Q_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq r^2\}$$
   (a) Tracer les ensembles $Q_{\frac{1}{2}}$ et Q_1.
   (b) Que vaut $\mathbb{P}((X,Y) \in Q_1)$?
   (c) Justifier que, pour n'importe quel $t \in [0,1]$,
$$\mathbb{P}((X,Y) \in Q_1 \text{ et } 0 \leq X \leq t) = \int_0^t \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$
   (d) À l'aide du changement de variable $x = \sin(\theta)$, montrer que
$$\mathbb{P}\left((X,Y) \in Q_1 \text{ et } 0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}$$
   (e) Les événements $[(X,Y) \in Q_1]$ et $\left[0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right]$ sont-ils indépendants ?

4. On s'intéresse à la variable aléatoire $D = \sqrt{X^2+Y^2}$. On souhaite calculer la fonction F_D : $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(D \leq t)$.
   (a) Quel est l'ensemble de valeurs que peut prendre D ?
   (b) Trouver l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles $F_D(t) = 0$, puis celui pour lesquelles $F_D(t) = 1$.

   Pour $t \geq 0$, on définit
$$I(t) = \int_0^t \sqrt{t^2-x^2}\mathrm{d}x$$

(c) Montrer que $I(t) = t^2 I(1)$.
(d) En déduire la valeur de $F_D(t)$ lorsque $t \in [0,1]$.
(e) Pourquoi ne peut-on pas étendre ce raisonnement pour $t > 1$?
(f) Quelle intégrale faudrait-il calculer (on ne demande pas de la calculer) pour obtenir les valeurs $F_D(t)$ manquantes ?
(g) Montrer que D ne suit pas une loi uniforme.