Devoir surveillé n°2

Durée : 4h

La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Vous devez donc faire des raisonnements clairs et complets. Prenez soin d'utiliser le langage mathématique avec précision et de rendre une copie propre. Évitez les ratures, les fautes d'orthographe et de grammaire. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que vous voulez en revanche l'ordre des questions au sein d'un exercice doit être respecté. Vous pouvez admettre un résultat et l'utiliser si vous n'arrivez pas à le démontrer.

La calculatrice est interdite.

Exercice 0 : Les basiques

1° Donner sans justifier, une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

a) libre et génératrice

b) libre mais pas génératrice

c) génératrice mais pas libre

d) ni libre ni génératrice

2° Donner 2 sous espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3° Donner 2 sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ qui ne sont pas en somme directe.

4° Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^\pi \ln(x)dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{Arctan}(x)dx$

Exercice 1 ANNULE ET REMPLACE:

Suites, fonctions et intégrales (Ecricome 2017)

On note E = $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ l'ensemble des réels non entiers.

On rappelle qu'au voisinage de 0 on a :

$$\sin(u) \sim u \text{ et } 1-\cos(u) \sim \frac{u^2}{2}$$

On rappelle aussi que pour tout réel p et q:

$$\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

et pour tout réel u et v:

$$\cos(u)\times\cos(v) = \frac{1}{2}(\cos(u+v)+\cos(u-v))$$

1. Pour tout $a \in E$, on considère $\varphi_a: [0;\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{\cos(2ax)-1}{\sin(x)} & si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x=0 \end{cases}$$

   a) Montrer que φ_a est continue sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.
   b) Justifier que φ_a est dérivable sur $]0;\frac{\pi}{2}]$ et pour tout $x \in]0;\frac{\pi}{2}]$, calculer $\varphi_a'(x)$.
   c) Justifier que φ_a est C^1 sur $]0;\frac{\pi}{2}]$.
   d) Montrer que φ_a est dérivable en 0 et que $\varphi_a'(0) = -2a^2$.
   e) Calculer $\lim_{x\to 0^+} \varphi_a'(x)$ et justifier que φ_a est C^1 sur $[0;\frac{\pi}{2}]$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $a \in E$ on pose :

$$f_n(a) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_a(t)\sin\big((2n+1)t\big)\,dt$$

   a) A l'aide d'une IPP, établir l'existence d'un réel A>0 tel que pour tout entier $n \geq 1$, $|f_n(a)| \leq \frac{A}{2n+1}$.
   En déduire $\lim_{n\to+\infty} f_n(a)$.
   b) Montrer que pour tout $a \in E$, $f_0(a) = \frac{\sin(\pi a)}{a} - \pi$.
   c) Établir que pour tout $a \in E$ et pour tout entier $k \geq 1$,

$$f_k(a) - f_{k-1}(a) = (-1)^k \sin(\pi a)\left(\frac{1}{a+k}+\frac{1}{a-k}\right)$$

3. Pour tout $a \in E$, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+k}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{a-k}$$

Justifier que pour tout $a \in E$ et pour tout entier $n \geq 1$,
$$f_n(a) = \sin(\pi a)\,[I_n(a) + J_n(a)] - \pi$$

4. Pour tout $a \in]0;1[$ et pour tout $t \in]0;1]$, on pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k+a-1}$$
$$et$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \beta_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} t^{k-a-1}$$
En admettant qu'elles sont bien définies, exprimer les intégrales $\int_0^1 \alpha_n(t)\,dt$ et $\int_0^1 \beta_n(t)\,dt$ en fonction de $I_n(a)$ *et* $J_n(a)$.

Exercice 2 : Intégrale fonction de sa borne supérieure
On note pour tout x pour lequel cela a un sens :
$$g(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt$$
1. Justifier que g est bien définie sur]-1 ;+∞[.
2. Étudier le signe de g sur]-1 ;+∞[.
3. Montrer que g est C^1 sur]-1 ;+∞[et étudier ses variations.
4. a) Montrer que pour tout $t > 0$, $\frac{t}{\sqrt{t+1}} \leq \sqrt{t}$.
   b) Peut-on en déduire la limite de g en $+\infty$?
5. a) A l'aide d'un changement de variable affine, montrer que pour tout $x > -1, g(x) = \int_1^{x+1} \sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\,du.$
   b) En déduire, pour tout $x > -1$, l'expression de $g(x)$.
   c) Retrouver alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
   d) La fonction g est-elle prolongeable par continuité à droite de $x = -1$?

Exercice 3 : Calculs matriciels
(la question 2 sera donnée dans le DM8)

On considère les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.
   (b) Vérifier que P est inversible, donner son inverse, et vérifier que $P^{-1}AP = T$.
   (c) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (d) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
   (e) En déduire la valeur de A^n en fonction de n (*on souhaite les quatre coefficients de la matrice*).

Exercice 4 : Espaces vectoriels et projecteurs
Dans tout l'exercice on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
On rappelle qu'un endomorphisme g est le projecteur sur $Im(g)$ parallèlement à $Ker\,(g)$ si et seulement si $gog = g$.

On considère les ensembles suivants :
$$\text{F} = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, y = z\}$$
$$\text{et G} = \text{Vect}\,((1;1;2)).$$

Partie A :
1. Justifier que F est le sous espace vectoriel engendré par (1;0;0) et (0;1;1). Quelle est sa dimension ?
2. Justifier que G = $\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3, x - y = 0 \text{ et } z - 2y = 0\}$
3. a) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
   b) Pour $u = (a;b;c) \in \mathbb{R}^3$, montrer que $p(u) = (a + b - c\,; 2b - c; 2b - c)$ est la projection de u sur F parallèlement à G. Décomposer alors u dans F $\oplus$ G.
   c) Donner B la matrice canoniquement associée à p.

Partie B :

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x; y; z) = (x + y - z; y; y)$$

1. Donner A, la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$
2. Montrer que $A^2 = A$. L'application f est donc un projecteur.
3. Montrer que G et Ker (f) sont en somme directe.
4. Montrer que $pof = f$ et que $fop = p$.

Partie C : BONUS

On considère $r = p + f$ et id : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application identité.

1. Justifier que r n'est pas un projecteur.
2. Montrer que Im$(r - 2id) \subset Ker(r)$ et que Ker$(r - 2id) \subset Im(r)$
3. Écrire id comme combinaison linéaire de r et de $r - 2id$
4. En déduire que $\mathbb{R}^3 = Ker(r) + Ker(r - 2\,id)$. Cette somme est-elle directe ?

Exercice 1 INITIALEMENT PREVU:

Suites, fonctions et intégrales (ECE 2002)

Pour tout entier naturel n non nul on considère
la fonction f_n définie sur]-1 ;+∞[par $f_n(x) = x^n \ln(1 + x)$ et
la fonction h_n définie sur]-1 ;+∞[par $h_n(x) = n\ln(1 + x) + \frac{x}{1+x}$

Partie A : Étude des fonctions f_n

1. Soit n ∈ $\mathbb{N}^*$. Étudier le sens de variation de h_n.
2. Calculer $h_n(0)$ et en déduire le signe de h_n.
3. On s'intéresse au cas particulier où n = 1.

a) Exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.

b) En déduire les variations de f_1 sur]-1 ;+∞[.

4. On considère un entier n≥ 2.

a) Exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.

b) En déduire les variations de f_n sur]-1 ;+∞[(on distinguera les cas suivant la parité de n et on précisera les limites aux bornes).

Partie B : Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n non nul on considère

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)dx.$$

1. a) Justifier que pour tout $x \in [0; 1], \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

b) Avec une intégration par parties, montrer que $U_1 = \frac{1}{4}$

2. a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

b) Justifier que pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$ on a : $0 \le U_n \le \frac{\ln(2)}{n+1}$

c) Que peut-on en déduire ?

3. Pour $x \in [0; 1]$ et n ∈ $\mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k$$

a) Justifier que pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0; 1]$, $S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$

b) En intégrant de part et d'autre de cette égalité, justifier que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

c) Avec une intégration par parties, montrer que :

$$U_n = \frac{\ln(2)}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right)$$

d) Peut-on généraliser ce résultat lorsque n = 1 ?