

Corrigé du devoir maison n°9

1. Méthode 1 : Montrons que  $f$  est injectif c'est-à-dire  $\ker(f)=\{0\}$ . Cela suffit car  $f$  est un endomorphisme donc il est bijectif si et seulement s'il est injectif (attention cette méthode ne permet pas de déterminer la matrice de  $f^{-1}$ ) ...

Méthode 2 : Montrons que  $3M$  est inversible et calculons son inverse (ce sera la matrice de  $(3f)^{-1} = \frac{1}{3}f^{-1}$ ):

1<sup>ère</sup> façon : Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

$$\text{On a } 3MX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 2z = a \\ 2x - y - 2z = b \\ -2x - 2y - z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 2z = a \\ 3y - 6z = b + 2a \\ -6z + 3z = c - 2a \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1; \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - 2z = a \\ 3y - 6z = b + 2a \\ -27z = 6a + 6b + 3c \end{cases} \quad L_3 \leftarrow 3L_3 + 6L_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9}(-a + 2b - 2c) \\ y = \frac{1}{9}(2a - b - 2c) \\ z = \frac{1}{-9}(2a + 2b + c) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } (3M)^{-1} = \frac{1}{3}M^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ d'où } M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = M$$

2<sup>ème</sup> façon : On fait des opérations sur les lignes de  $3M$  jusqu'à obtenir l'identité.

3<sup>ème</sup> façon : On a  $M^2 = I_3$  donc  $M$  est inversible d'inverse elle-même.  $f$  est une symétrie.

2. Méthode 1 :  $D = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = u\} = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) - u = 0\} = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$  est le noyau de l'application linéaire  $f - id_{\mathbb{R}^3}$  donc c'est bien un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

Méthode 2 :

- On a bien  $D \subset \mathbb{R}^3$
- On montre que  $D$  n'est pas vide car il contient le vecteur nul.
- Pour  $u, v \in D$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on montre que  $\lambda u + v \in D$

La matrice canoniquement associée à l'application linéaire  $f - id_{\mathbb{R}^3}$  est  $M - I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

Le noyau de  $f - id_{\mathbb{R}^3}$  est l'ensemble des vecteurs  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - 4y - 2z = 0 \\ -2x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y - 2z = 0 \\ -6y - 6z = 0 \\ -6y - 6z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1; \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ y = -z \end{cases}$$

$\ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ . Une base de  $D$  est le vecteur  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  $D$  est une droite de  $\mathbb{R}^3$ .

3. De même  $P = \ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$  est un sev de  $\mathbb{R}^3$  en tant que noyau d'une application linéaire.

La matrice canoniquement associée à l'application linéaire  $f + id_{\mathbb{R}^3}$  est  $M + I_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Le noyau de  $f + id_{\mathbb{R}^3}$  est l'ensemble des vecteurs  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1; L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

Une équation cartésienne de  $P$  est  $2x + 2y - 2z = 0$ .  $P$  est un plan de  $\mathbb{R}^3$ .

**Remarque** :  $f$  est la symétrie par rapport à  $D$  parallèlement à  $P$ . D'après l'exercice 14 du TD9,  $D$  et  $P$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ . Dans une base de  $\mathbb{R}^3$  composée de  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et de 2 vecteurs générateurs de  $P$ ,  $f$  a pour matrice :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

4. On nous donne une équation cartésienne donc  $Q$  est un plan généré par les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ par exemple. } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires donc } (\vec{u}; \vec{v}) \text{ est une base de } Q.$$

On sait que  $f(Q) = \text{Vect}(f(\vec{u}); f(\vec{v})) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset Q$ . De plus  $f(\vec{u})$  et  $f(\vec{v})$  ne sont pas colinéaires donc une

base de  $f(Q)$  est  $(f(\vec{u}); f(\vec{v}))$ .  $f(Q)$  est donc un sev de dimension 2 contenu dans  $Q$  donc  $f(Q) = Q$ .