Corrigé du devoir maison n°8

Exercice 1 :

2. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors :

$$MT = TM \iff \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = a+c \\ a+b = b+d \\ c = c \\ c+d = d \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases}$$

(b) D'après la question précédente, on a donc :

$$C' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ / \ a = d \text{ et } c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) Soit $K \in M_2(\mathbb{R})$.

K ∈ C ⟺ AK = KA

On rappelle que $A = PTP^{-1}$ ainsi $K \in C \Leftrightarrow PTP^{-1}K = K\,PTP^{-1}$

En multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P. On a

K ∈ C ⟺ $TP^{-1}KP = P^{-1}\,K\,PT \Leftrightarrow P^{-1}\,K\,P$ commute avec T⟺ $P^{-1}\,K\,P \in C'$

(d) K ∈ C ⟺ il existe a, b ∈ ℝ tel que $P^{-1}KP = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow K = P \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\iff K = \begin{pmatrix} a+6b & -4b \\ 9b & a-6b \end{pmatrix}$$

Ainsi, toutes les matrices qui commutent avec A sont celles qui s'expriment comme une combinaison linéaire de I_2 et de $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$.

Remarque : C est le sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ engendré par I_2 et $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$, il est de dimension 2.

Exercice 2 :

1. Méthode 1 : Montrons que f est injectif c'est-à-dire ker(f)={0}. Cela suffit car f est un endomorphisme donc il est bijectif si et seulement s'il est injectif (attention cette méthode ne permet pas de déterminer la matrice de f^{-1}) …
Méthode 2 : Montrons que f est surjectif c'est-à-dire rg(f)=3. Cela suffit car f est un endomorphisme donc il est bijectif si et seulement s'il est surjectif (attention cette méthode ne permet pas de déterminer la matrice de f^{-1}) …
Méthode 3 : Montrons que 3M est inversible et calculons son inverse (ce sera la matrice de $(3f)^{-1} = \frac{1}{3}f^{-1}$):

1ère façon : Soit X= $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et Y = $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

On a 3MX = Y $\leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-2z = a \\ 2x-y-2z = b \\ -2x-2y-z = c \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-2z = a \\ 3y-6z = b+2a \\ -6z+3z = c-2a \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$; $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-2z = a \\ 3y-6z = b+2a \\ -27z = 6a+6b+3c \end{cases} \quad L_3 \leftarrow 3L_3 + 6L_1 \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9}(-a+2b-2c) \\ y = \frac{1}{9}(2a-b-2c) \\ z = \frac{1}{-9}(2a+2b+c) \end{cases}$$

Ainsi $(3M)^{-1} = \frac{1}{3}M^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ d'où $M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = M$