

Traiter au choix l'un des exercices suivants :

Exercice 1 :

Soient les ensembles suivants :

$$F = Vect((1, 0, -1), (0, -1, 1), (-1, 1, 0))$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y - z = 0\}$$

$$H = \{(a, a, a), a \in \mathbb{R}\}$$

$$J = Vect((0, 2, 2), (0, -1, -1))$$

1. Montrer que  $F$ ,  $G$ ,  $H$  et  $J$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer pour chacun de ces espaces une base et la dimension.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel  $F \cap G$  (en donner une base et la dimension).

Exercice 2 :

Résoudre le système suivant selon les valeurs du paramètre  $m \in \mathbb{R}$  :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} -x_1 & -2x_2 & -x_3 & = -1 \\ -x_1 & +(m-2)x_2 & -3x_3 & = -m-3 \\ 2x_1 & +(2m+2)x_2 & +(m-1)x_3 & = -2m-1 \end{cases}$$

## Corrigé du devoir maison n°7

## Exercice 1 :

- 1) F et J sont des sous espaces vectoriels engendrés par des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  donc ce sont des sous espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  (ils sont contenus dans  $\mathbb{R}^3$ , ils sont non vides et ils sont stables par combinaisons linéaires).

Pour déterminer une base de F vérifions si la famille qui engendre F est libre. On cherche s'il existe des

$$\text{réels } a, b, c \text{ non tous nuls tels que } a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 0 \\ -b + c = 0 \\ -a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = c \\ a = b \end{cases}$$

Il semble que  $a = b = c = 1$  conviennent, en effet :  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Ainsi  $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ . Les deux vecteurs qui engendrent F sont clairement non colinéaires (on le voit par exemple à la position des 0) donc ils forment une base de F et ainsi  $\dim(F)=2$ . F est un plan vectoriel.

On remarque que  $J = \text{Vect}((0; -1; -1))$  car les vecteurs qui engendrent J sont colinéaires. Ainsi  $\dim(J) = 1$ . J est une droite vectorielle.

$H = \text{Vect}((1; 1; 1))$  est aussi un sous espace vectoriel engendré par un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  donc c'est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Le vecteur  $(1; 1; 1)$  étant non nul on a  $\dim(H) = 1$ . H est une droite vectorielle.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / z = 2x - y \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Les deux vecteurs qui engendrent G sont clairement non colinéaires (on le voit par exemple à la position des 0) donc ils forment une base de G et ainsi  $\dim(G)=2$ . G est un plan vectoriel.

**Remarques :**

A) on peut aussi vérifier que

- $G \subset \mathbb{R}^3$ ;
- Le vecteur nul appartient à G donc G n'est pas vide.
- Si  $u(x; y; z)$  et  $v(x'; y'; z')$  appartiennent à G et si  $\alpha$  est un réel alors  $\alpha u + v \in G$  en effet les coordonnées de  $\alpha u + v$  sont  $(\alpha x + x'; \alpha y + y'; \alpha z + z')$  et  $2(\alpha x + x') - (\alpha y + y') + \alpha z + z' = \alpha(2x - y + z) + 2x' - y' + z' = \alpha \times 0 + 0 = 0$

B) L'équation cartésienne vérifiée par les coordonnées des vecteurs de G est celle d'un hyperplan.

$$2) \text{ Soit } u \in F \cap G. \text{ Alors il existe } a \text{ et } b \text{ des réels tels que } u = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ -a + b \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$2a - (-b) - (-a + b) = 0 \Leftrightarrow 3a = 0$$

Ainsi  $u = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \\ b \end{pmatrix}$  et  $F \cap G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ . C'est une droite vectorielle de dimension 1.

## Exercice 2 :

1. Soit  $(A|B)$  la matrice augmentée associée au système. On a

$$(A|B) \underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow -L_1}{\sim}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & m-2 & -3 & -m-3 \\ 2 & 2m+2 & m-1 & -2m-1 \end{array} \right) \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & m & -2 & -m-2 \\ 0 & 2m-2 & m-3 & -2m-3 \end{array} \right)$$

Soit

$$(A|B) \underset{L}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & m & -2 & -m-2 \\ 0 & -2 & m+1 & 1 \end{array} \right) \underset{L}{\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & m+1 & 1 \\ 0 & m & -2 & -m-2 \end{array} \right)$$

On obtient :

$$(A|B) \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}{\sim}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{m+1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & m & -2 & -m-2 \end{array} \right) \underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{L_3 \leftarrow L_3 - mL_2}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{m+1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 + m\frac{m+1}{2} & -\frac{m}{2} - 2 \end{array} \right)$$

Et finalement :

$$(A|B) \underset{L}{\overset{L_3 \leftarrow 2L_3}{\sim}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{m+1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & m^2 + m - 4 & -m - 4 \end{array} \right)$$

On a un polynôme de degré 2, ces deux racines sont  $m_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ .

Si  $m \notin \{m_-, m_+\}$ , alors le système est de Cramer et admet une seule solution:

$$(A|B) \underset{L}{\sim} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & m+2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{m+1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-m-4}{m^2+m-4} \end{array} \right) \underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - (m+2)L_3}{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{m+1}{2}L_3}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3m^2+8m}{m^2+m-4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2m^2+6m}{2m^2+2m-8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-m-4}{m^2+m-4} \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } (S) \iff \begin{cases} x_1 = \frac{3m^2+8m}{m^2+m-4} \\ x_2 = -\frac{2m^2+6m}{2m^2+2m-8} \\ x_3 = \frac{-m-4}{m^2+m-4} \end{cases} .$$


---