HKBL 2019-2020

Devoir maison n°14

Pour le 4 mai

On définit pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1) Justifier que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.
2) a) Montrer que la fonction $f$ est strictement décroissante $]0\,;+\infty[$.

   b) Justifier alors que pour tout entier naturel k non nul on a : $u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq u_k$

   c) En déduire que pour tout entier naturel $n$ non nul et pour tout entier m≥ $n$ :

$$\sum_{k=n+1}^{m+1} u_k \leq \int_n^{m+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{m} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

3) BONUS : En admettant que $\int_n^{+\infty} f(x)dx \sim \frac{1}{n}$, déterminer un équivalent du reste de rang n de la série de terme général $u_n$.