

## Devoir maison n°12

Pour le 25 mars

On considère l'application  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x \ln(x) - 1}{x}$ .

**1. Etude de  $f$ .**

- (a) Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
- (b) Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- (c) Calculer  $f'(x)$  pour  $x > 0$  et étudier le signe de  $f'(x)$ .
- (d) Prouver l'existence d'un unique réel  $\alpha > 0$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .  
Justifier que  $\alpha \in [1, e]$ .

**2. Etude d'une suite réelle.**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par la relation de récurrence suivante:

$$\begin{cases} u_0 = e \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) + u_n \end{cases}$$

- (a) Démontrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > \alpha$ .
- (b) Démontrer que  $(u_n)$  est strictement croissante.
- (c) En supposant que  $(u_n)$  ait une limite,  $L$ , montrer que nécessairement  $f(L) = 0$ .  
En déduire que  $(u_n)$  ne peut pas être convergente.