Devoir maison n°15

Pour le 27 mai

On effectue une suite indéfinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ lancer donne Pile » et F_n l'événement « le $n^{\text{ème}}$ lancer donne Face ».

Pour tout $n \geqslant 3$ on note :

$$B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n, \quad U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i \text{ et } u_n = P(U_n)$$

1. Pour tout $n \geqslant 3$, calculer $P(B_n)$.

2. Pour tout $n \geqslant 3$, montrer que les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont incompatibles ; sont-ils mutuellement indépendants ?

3. Calculer u_3, u_4 et u_5.

4. Pour tout $n \geqslant 5$, trouver une relation entre $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$; en déduire une expression de $P(U_n \cap B_{n+1})$ à l'aide de u_{n-2}.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ est convergente.

6. Pour tout $n \geqslant 5$, montrer que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

7. Déterminer la limite de la suite (u_n).

8. Calculer la probabilité de l'événement $N =$ « dans la succession des lancers, il n'y a jamais deux Pile successifs immédiatement suivis d'un Face ».