Corrigé du devoir maison n°13

Exercice 1 : Rang de la première séquence Pile-Face

1) Il faut au moins 2 lancers donc T(Ω)= $\mathbb{N}\backslash\{0;1\}$

Partie A :

2) Méthode 1 : En suivant les indications de l'énoncé et en s'inspirant de l'exercice 23 du TD 14.

Méthode 2 : En remarquant que pour n$\geq 2, l'$événement « T = n » s'écrit avec des notations évidentes:

$$\bigcup_{k=0}^{n-2}[(\bigcap_{i=1}^{k} F_i) \cap (\bigcap_{i=k+1}^{n-1} P_i) \cap F_i]$$

$(ce\ que\ vous\ pouvez\ \text{é}crire\ en\ extension\ comme\ dans\ l'exercice\ 21\ du\ TD\ 14)$

C'est une union disjointe et les événements étant indépendants on a :

$$\mathrm{P(T = n)} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2^{n-k-1}} \times \frac{1}{2} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^n} = \frac{n-1}{2^n}$$

3) On sait que E(T) est la somme de la série de terme général nP(T = n).
Soit N ≥ 2. On a

$$\sum_{n=2}^{N} \mathrm{nP(T = n)} = \sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-1)}{2^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$$

A la limite, quand $N \to +\infty,$ on reconnaît une série géométrique dérivée seconde
Ainsi E(T)= $\frac{1}{4}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 4.$

4) Avec la formule de Koenig Huygens, on a V(T)= E($T^2) - E(T)^2$.

a) Vérifions que $\sum_{n\geq 2} n^2 P(T=n)$ converge absolument. Soit N≥ 2. On a :

$$\sum_{n=2}^{N} \mathrm{n^2P(T = n)} = \sum_{n=2}^{N} \frac{n^2(n-1)}{2^n} = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{N} \frac{n^2(n-1)}{2^{n-2}} = \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-2)(n-1)}{2^{n-2}} + \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{N} \frac{2n(n-1)}{2^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=3}^{N} \frac{n(n-2)(n-1)}{2^{n-2}} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{n=3}^{N} \frac{n(n-2)(n-1)}{2^{n-3}} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{n(n-1)}{2^{n-2}}$$

A la limite, quand $N \to +\infty$, E($T^2) = \frac{1}{8} \times 96 + 2\,E(T) = 20$

b) Finalement avec la formule de Koenig Huygens on a :
V(T)= E($T^2) - E(T)^2$= 20-16= 4

Partie B :

2) $$\mathrm{P(T = n)} = \sum_{k=0}^{n-2} (\frac{2}{3})^k \times \frac{1}{3^{n-k-1}} \times \frac{2}{3} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^{k+1}}{3^n} = \frac{2}{3^n}(2^{n-1} - 1)$$

3) E(T) = $\frac{9}{2}$

Partie C : On peut s'inspirer de l'exercice 22 du TD 14

2) $\mathrm{P}(\mathrm{T}=\ \mathrm{n}) = \sum_{k=0}^{n-2}(1-p)^k \times p^{n-k-1} \times (1-p)$

$$= (1-p)p^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1-p}{p}\right)^k = (1-p)p^{n-1}\ \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}}{\frac{2p-1}{p}}$$

$$= \frac{p(1-p)}{2p-1}\left(p^{n-1}-(1-p)^{n-1}\right)$$

3)E(T) $= \frac{1}{pq}$

<u>Exercice 2</u> : (VAR discrète dénombrable)

1° Soit N ∈ $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(N+1)!}$$

Par passage à la limite dans cette somme partielle, on montre que la série de terme général $\frac{n}{(n+1)!}$ est convergente de somme 1 (<u>logique :</u> c'est la somme de toutes les probabilités).

2° Soit N ∈ $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{N} n \times \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N}\frac{n^2}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N}\frac{n(n+1)-n}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n-1)!} - \frac{n}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k!} - \sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n+1)!}$$

On reconnaît la série exponentielle pour $x = 1$ et la somme qu'on a calculé précédemment ainsi la variable aléatoire X admet bien une espérance et en passant à la limite dans les sommes partielles précédentes on a E(X) = e-1

3° Soit N ∈ $\mathbb{N}^*, n \geq 3$.

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 \times \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N}\frac{n^3}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{N}\frac{n^2(n+1)-n^2}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n-1)!} - \frac{n^2}{(n+1)!}$$

$$= 1 + 2 + \sum_{n=3}^{N}\frac{n-1+1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{N}\frac{n^2}{(n+1)!}$$

$$= 3 + \sum_{n=3}^{N}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{k=2}^{N-1}\frac{1}{k!} - \sum_{n=1}^{N}\frac{n^2}{(n+1)!}$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{N-2} \frac{1}{k!} + \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{(n+1)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{n=1}^{N} \frac{n^2}{(n+1)!}$$

On reconnaît la série exponentielle pour $x = 1$ et la somme qu'on a calculé précédemment ainsi la variable aléatoire X admet bien un moment d'ordre 2 et en passant à la limite dans les sommes partielles précédentes on a
E(X^2) = $2e - (e-1) = e+1$
La formule de Koenig Huygens nous donne alors :
V(X) = E(X^2) $- \mathrm{E}(X)^2 = e + 1 - (e-1)^2 = 3e - e^2$