DL et contre-exemples

- Une fonction est continue si et seulement si elle admet un DL à l'ordre 0 en $o(1)$ (on retrouve la notion d'**équivalence**).

- Une fonction est dérivable si et seulement si elle admet un DL à l'ordre 1 en $o(x)$.

ATTENTION : s'il y a un quotient alors il se peut qu'il y ait des simplifications auquel cas pour avoir l'ordre 0 on peut être amené à développer le numérateur et le dénominateur à l'ordre 1 par exemple (cf exercice 7 question 1) et pour avoir l'ordre 2 on peut être amené à développer le numérateur et le dénominateur à l'ordre 3 (cf exercice 7 question 2)

- Au delà de l'ordre 2, on ne peut rien conclure sur la régularité de f.

Voici par exemple une fonction qui admet un DL à l'ordre 2 en 0 mais qui n'est pas 2 fois dérivable en 0 :
$\forall x \in \mathbb{R}^*;\ f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

On démontre facilement avec le théorème des gendarmes que :

$$x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{o}(x^2)$$

f a donc bien un $DL_2(0)$ puisque $f(x) = 1 + x + x^2 + \mathrm{o}(x^2)$
En particulier f admet un $DL_0(0)$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$
De même f admet un $DL_1(0)$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

Pourtant $\forall x \in \mathbb{R}^*;\ f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^3 \times \frac{-2}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$
$$= 1 + 2x + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$\lim\limits_{x \to 0} 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ n'existe pas ainsi $f'(x)$ n'est pas prolongeable par continuité en 0 donc pas dérivable : $f''(0)$ n'existe pas alors que f a un $DL_2(0)$!

- On peut intégrer un DL mais on ne peut pas le dériver. Voici une fonction qui admet un $DL_1(0)$ dont la dérivée n'admet pas de $DL_0(0)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*; g(x) = 1 + x^2 cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

On démontre facilement avec le théorème des gendarmes que :
$x^2 cos\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{o}(x)$ ainsi g admet un $DL_1(0)$ puisque $g(x) = 1 + o(x)$
Mais $\forall x \in \mathbb{R}^*$; $g'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \frac{-1}{x^2}\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
n'est pas continue en 0 donc g' n'admet pas de $DL_0(0)$.

Remarques :

- La fonction f précédemment choisie donne aussi un contre-exemple pour justifier qu'on ne peut pas dériver un DL. On peut aussi considérer

$$\forall x \in \mathbb{R}^*; h(x) = x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

La fonction h est dérivable en 0 car elle admet $DL_1(0)$: $h(x) = o(x)$, pourtant sa dérivée n'est pas continue en 0, h' n'a donc pas de $DL_0(0)$.

- L'exercice 8 du TD13 donne aussi un joli contre-exemple où la fonction f admet un DL2 mais la fonction f' n'admet pas de DL1