Le devoir comporte cinq exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur deux pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose : $\forall t \in]0, +\infty[,\ f_a(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{a^2}{t}\right)$.
   Montrer que : $\forall t > 0,\ f_a(t) \geqslant a$.
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x > 0,\ \forall y > 0,\ g(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)$$

   (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.
   (b) Montrer que si g admet un extremum, alors il est atteint en un unique point (à déterminer).
   (c) Vérifier que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ g(x,y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
   (d) En déduire que g admet un minimum global sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 2

Un étudiant va acheter trois livres de maths et deux bandes dessinées. Dans le magain il y a dix livres de maths et vingt bandes dessinées.

1. De combien de façons l'étudiant peut-il faire ses achats ?
2. De retour chez lui, l'étudiant forme une pile avec ses nouveaux livres. De combien de façons peut-il le faire ?
3. Même question si l'étudiant souhaite que ses livres de maths se trouvent en bas de la pile, et ses bandes dessinées en haut.
4. Même question si l'étudiant souhaite que ses livres de maths se suivent dans la pile (mais pas nécessairement les bandes dessinées).

Exercice 3

Pour son vélo, Toto possède un antivol à code. Le code est une succession de trois chiffres compris entre 0 et 9.

1. Toto a oublié son code. Combien de codes doit-il essayer dans le pire des cas avant de retrouver la bonne ?
2. Même question en supposant que Toto se souvient que son code commence par un 8.
3. Même question en supposant que Toto se souvient que son code se termine par un chiffre pair.
4. Même question en supposant que Toto se souvient que son code ne contient que des chiffres pairs.
5. Même question en supposant que Toto se souvient que son code ne contient que des chiffres impairs.
6. Même question en supposant que Toto se souvient que son code contient au moins un chiffre pair.
7. Même question en supposant que Toto se souvient que son code contient exactement un chiffre pair.

Exercice 4

Un tiroir contient 6 paires de chaussures, toutes différentes, chaque paire étant composée d'une chaussure gauche et d'une chaussure droite. Parmi les paires de chaussures, 4 paires sont noires et 2 sont rouges.
On prélève 4 chaussures au hasard.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien de tirages amènent 4 chaussures de la même couleur ?
3. Combien de tirages amènent 2 pieds gauches et 2 pieds droits ?
4. Combien y a-t-il de tirages où figure exactement une paire ?

Exercice 5

1. Démontrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ convergent et déterminer leur valeur.
2. Soit $x \geqslant 1$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x}dt$ existe. On note alors :
$$\forall x \geqslant 1,\ f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+x}dt$$
3. Démontrer que :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
4. Démontrer que :
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$
On pourra commencer par calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (1 - xf(x))$.