Lycée du Parc 2014-2015

Hypokhâgne B/L - Concours Blanc

Épreuve de mathématiques

Jeudi 21 Mai 2015 - 08h-12h

L'épreuve comporte trois exercices indépendants qui peuvent être abordés dans un ordre au choix du candidat. Le sujet est rédigé sur 4 pages dont celle-ci. L'usage de calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Exercice 1

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

et P le polynôme défini par :

$$P(X) = X^3 - X^2 - 7X + 11.$$

On note par convention $P(A)$ la matrice $P(A) = A^3 - A^2 - 7A + 11\, I_3$, où I_3 désigne la matrice identité de taille 3×3.

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que $P(A)$ est la matrice nulle.
2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et A^2.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et V un vecteur propre associé. Calculer $P(A)V$ de deux manières pour en déduire que $P(\lambda) = 0$.

Le but des questions 4 à 6 est de montrer que, réciproquement, toutes les racines de P sont des valeurs propres de A. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, on s'intéresse au système linéaire :

$$(L) \ : \ \begin{cases} (2-\lambda)x - y + z & = 0 \\ x - \lambda y - z & = 0 \\ 2x - 4y - (1+\lambda)z & = 0 \end{cases}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad (A - \lambda I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Résoudre (L) lorsque $\lambda = 2$.
5. En supposant que $\lambda \neq 2$, montrer à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss que (L) est équivalent au système

$$\begin{cases} 2x & -4y & -(1+\lambda)z & = 0 \\ & (2-\lambda)y & +\dfrac{\lambda-1}{2}z & = 0 \\ & & \dfrac{cP(\lambda)}{2-\lambda}z & = 0 \end{cases}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer.

6. Montrer que si λ est racine de P, alors (L) admet des solutions non nulles.
En conclure que l'ensemble des valeurs propres de A est l'ensemble des racines de P.
7. Déterminer le cardinal de l'ensemble des racines de P :
   (i) dans $\mathbb{R}$,
   (ii) dans $\mathbb{C}$.
8. A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

Exercice 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, vérifiant $f(0) = 0$ et la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^{-xf(x)} \qquad (*)$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Pour tout x réel, on pose : $g(x) = f(x) + f(-x)$ et $h(x) = (g(x))^2$.
   (a) On note g' la fonction dérivée de g.
   Montrer que pour tout x réel, $g'(x)$ est du même signe que $-xg(x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction h.
   (c) En déduire que f est une fonction impaire.

2. (a) Préciser les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (b) On note $a = f(1)$. Justifier que pour tout réel $x \geqslant 1$, on a : $f(x) \geqslant a > 0$.
   (c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xf(x)}dx$ est convergente.
   (d) À l'aide de la relation $(*)$, en déduire que f possède une limite finie en $+\infty$.
   On note alors pour la suite de l'exercice :
   $$\lambda = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

3. (a) Établir pour tout réel $x \geqslant 0$, l'inégalité suivante : $\displaystyle\int_0^x e^{-tf(t)}dt \geqslant \int_0^x e^{-\lambda t}dt$.
   (b) En déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $f(x) \geqslant \dfrac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda x})$.
   (c) Montrer que $\lambda \geqslant 1$.

4. (a) Soit a un réel strictement positif. Établir pour tout réel $x \in [a, +\infty[$, l'inégalité suivante :
   $$f(x) - f(a) \leqslant \int_a^x e^{-tf(a)}dt.$$
   (b) En déduire que pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a : $f(x) \leqslant f(a) + \dfrac{e^{-af(a)}}{f(a)}$.
   (c) On suppose que $\lambda > 1$. Établir l'existence d'un unique réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 1$.
   (d) En déduire que l'on a : $\lambda \leqslant 2$.

Exercice 3

Pour tout réel $r \geqslant 1$, soit f_r la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$$f_r(x) = \frac{\exp(-rx)}{\sqrt{1-x}},$$

et l'on pose

$$I(r) = \int_0^1 f_r(x)dx.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f_r. Représenter sommairement son graphe pour $r = 8$.
2. Montrer que $I(r)$ est une intégrale convergente pour tout réel $r \geqslant 1$.

On écrit dans la suite $I(r) = I_1(r) + I_2(r) + I_3(r)$, avec

$$\begin{aligned} I_1(r) &= \int_0^{r^{-2/3}} \exp(-rx)dx, \\ I_2(r) &= \int_0^{r^{-2/3}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right) \exp(-rx)dx, \\ I_3(r) &= \int_{r^{-2/3}}^1 \frac{\exp(-rx)}{\sqrt{1-x}}dx. \end{aligned}$$

3. Montrer que quand r tend vers l'infini, on a :

$$I_1(r) = \frac{1}{r}\big(1 + o(1)\big).$$

4. Montrer que pour tout réel y strictement compris entre 0 et 1, on peut écrire

$$1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-y}} \leqslant 1 + \frac{y}{2(1-y)^{3/2}}.$$

5. Montrer que pour tout $r \geqslant 1$,

$$0 \leqslant I_2(r) \leqslant c_2 \left(1 - r^{-2/3}\right)^{-3/2} \frac{1}{r^{4/3}},$$

   où c_2 est une constante dont on précisera la valeur.
6. Montrer que pour tout $r \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant I_3(r) \leqslant c_3 \exp\left(-r^{1/3}\right),$$

   où c_3 est une constante dont on précisera la valeur.
7. En déduire que $I(r)$ est équivalent à $1/r$ quand r tend vers l'infini.