Le devoir comporte trois exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur une seule page. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK = KM = M$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   (a) Montrer que $M \in E$ si et seulement si $a = c = g = i$, $b = h$ et $f = d$.
   (b) Déterminer une base de E.

Exercice 2

On note les matrices A, P et D suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
2. Vérifier que $P^{-1}AP = D$.
3. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

On note B et C les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ données par :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = 2B - I,$$

où I désigne ici la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(On résoudra l'exercice sans écrire explicitement la matrice C).

On note également F et G les ensembles suivants :

$$F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ CX = X\},$$

et

$$G = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ CX = -X\}.$$

1. Calculer B^2. La matrice B est-elle inversible ?
2. Calculer C^2. En déduire que C est inversible et préciser C^{-1}.
3. Montrer que F et G sont des sous-espace vectoriels de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
4. Montrer que F et G sont en somme directe.
5. Pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, montrer que :
   $$CX = X \iff BX = X,$$
   et
   $$CX = -X \iff BX = 0.$$
6. En déduire une base de F et une base de G.
7. Montrer finalement que :
   $$F \oplus G = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$