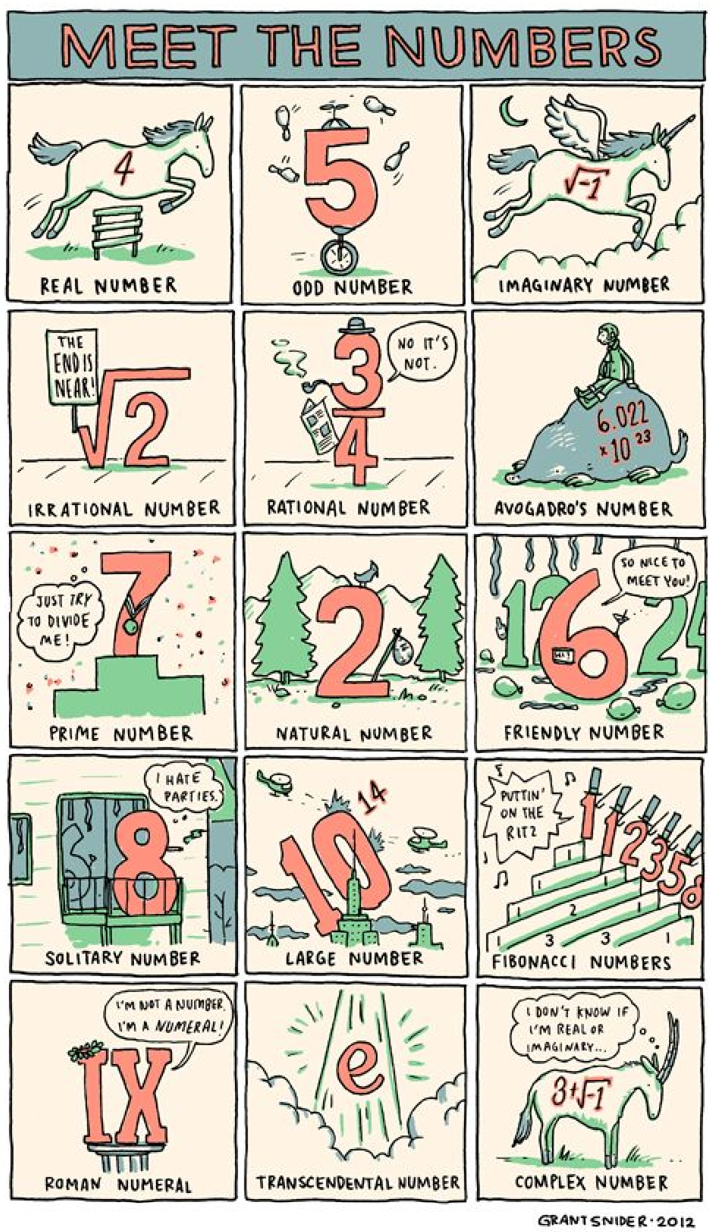
Hypokhâgne B/L - Concours Blanc

Épreuve de mathématiques

Vendredi 09 Janvier 2014 - 08h-12h

L'épreuve comporte cinq exercices indépendants qui peuvent être abordés dans un ordre au choix du candidat. Le sujet est rédigé sur 4 pages dont celle-ci. L'usage de calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.



Exercice 1

On considère l'équation :

$$(E)\ :\quad z^3-(3+4i)z^2+(1+11i)z-10i+10=0$$

1. Déterminer un réel y tel que $z=iy$ soit une solution de (E).
2. Déterminer $(b,c)\in\mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad z^3-(3+4i)z^2+(1+11i)z-10i+10=(z-2i)\times(z^2+bz+c)$$

3. Déterminer $\delta\in\mathbb{C}$ tel que $\delta^2=-15-8i$.
   On rappelle que $17^2=289$.
4. Résoudre l'équation (E).

Exercice 2

Soit f la fonction de $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ dans $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ définie par :

$$f(z)=\frac{z-2}{2z-1}.$$

1. Vérifier que si $z\neq\frac{1}{2}$, on a bien $f(z)\neq\frac{1}{2}$.
2. Déterminer les points fixes de f, i.e. les complexes z tels que $f(z)=z$.
3. Montrer que pour tous u et v de $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$,

$$f(u)=f(v)\implies u=v.$$

   Quelle est la signification de cette propriété pour f ?
4. Montrer que pour tout $v\in\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$, il existe un unique $u\in\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ tel que $f(u)=v$.
   Que peut-on en déduire à propos de f ? Que dire de f^{-1} ?
5. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. On rappelle que $f(\mathbb{U})=\{f(z),\ z\in\mathbb{U}\}$ désigne l'ensemble des images des éléments de $\mathbb{U}$ par f.
   (a) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Montrer que :

$$|z|=1\implies|f(z)|=1.$$

   Que peut-on en déduire à propos de $f(\mathbb{U})$?

   (b) Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Montrer que :

$$|f(z)|=1\implies|z|=1.$$

   (c) En déduire $f(\mathbb{U})$.

Exercice 3

1. Donner les expressions des racines 5-ièmes de l'unité.
2. Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, montrer que : $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = i\dfrac{\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$.
3. Résoudre l'équation $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1$. On se servira des questions 1 et 2 pour donner une expression simple des solutions à l'aide de la fonction tangente.

Exercice 4

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \left(\dfrac{x}{2} + 9 + \dfrac{8}{x^2}\right) e^{1/x}$.

1. Calculer les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{1/x} - 1).$$
(On pourra poser $y = 1/x$).
2. Déterminer les limites aux bords du domaine de définition de f.
3. On note pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $g(h) = hf\left(\dfrac{1}{h}\right)$. Déterminer un développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0. En déduire que f admet en $\pm\infty$ une asymptote oblique dont on précisera l'équation. Préciser également la position de la courbe représentative de f par rapport à cette asymptote au voisinage de $\pm\infty$.
4. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, puis montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{e^{1/x}(x+2)(x+1)(x^2-4x-8)}{2x^4}.$$
5. En déduire le tableau de variations de f.
6. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0$.
7. On prolonge f en 0 en posant $f(0) = 0$.
La fonction f est-elle continue à gauche en 0 ? Est-elle dérivable à gauche en 0 ?

Exercice 5

Dans cet exercice, on considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$).
On suppose que f est définie, continue et deux-fois dérivable sur $[a,b]$ et que f vérifie :

(H_1) $\quad f(a) > 0$ et $f(b) < 0$
(H_2) $\quad \forall x \in [a,b], \quad f'(x) < 0$
(H_3) $\quad f''$ est continue sur $[a,b]$ et : $\forall x \in [a,b], f''(x) > 0$

1. (a) Montrer que f réalise une bijection de $I = [a,b]$ sur un intervalle J à préciser.
(b) En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Préciser le signe de $f(x)$ pour $x \in [a,\alpha]$ et pour $x \in [\alpha,b]$.

2. On considère la fonction g définie par :
$$\forall x \in [a,b], \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$
   (a) Montrer que $g(a) \geqslant a$, que $g(b) \leqslant b$ et que $g(\alpha) = \alpha$.
   (b) Montrer que g est dérivable sur $[a,b]$ et montrer que :
$$\forall x \in [a,b], \quad g'(x) = \frac{N(x)}{(f'(x))^2},$$
   avec $N(x)$ à préciser à l'aide de f et de ses dérivées.
   (c) Dresser le tableau de variations de g sur $[a,b]$.
3. Soit (u_n) la suite définie par :
$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n).$$
   (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a, \alpha]$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $u_{n+1} - u_n$ à l'aide de u_n uniquement.
   En déduire que la suite (u_n) est monotone.
4. (a) Justifier qu'il existe un réel $M \geqslant 0$ et un réel $m \geqslant 0$ tels que :
$$\forall t \in [a,b],\ m \leqslant |f''(t)| \leqslant M$$
   (b) On pose : $\forall t \in [a, \alpha], \quad \theta(t) = f(t) + (\alpha - t) f'(t)$.
   Montrer que θ est dérivable sur $[a,b]$ et calculer $\theta'(t)$ pour tout $t \in [a,b]$.
   (c) À l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction θ entre u_n et α, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\theta(u_n)| \leqslant (\alpha - u_n)^2 M.$$
   (d) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{M}{m}(u_n - \alpha)^2.$$
   (e) On pose $K = \dfrac{m}{M}$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \alpha - u_n \leqslant \left(\frac{\alpha - a}{K}\right)^{2^n} K.$$
5. **Application :** on pose $\forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = x^3 - 4x + 1$.
   (a) Montrer que f vérifie (H_1), (H_2) et (H_3).
   (b) On désigne par α l'unique élément de $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   On pose $u_0 = \dfrac{1}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = g(u_n)$ avec $\forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
   Prouver que $\forall t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right],\ f'(t) \leqslant -\dfrac{13}{4}$ et $f''(t) \leqslant 3$.
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \alpha - u_n \leqslant \dfrac{13}{12}\left(\dfrac{3}{13}\right)^{2^n}$.