Le devoir comporte cinq exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur une page. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

1. Déterminer les formes algébriques et exponentielles de $z_1 z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{si } x \neq 0 \\ e & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Étudier les limites de f en -1 et en $+\infty$.
2. Montrer que f est continue en 0.
3. Rappeler le DL_2 de $\ln(1+x)$ en 0.
   En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
4. Justifier la dérivabilité de f sur $]-1, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ et donner la réponse sous la forme :

   $$f'(x) = -\frac{1}{x^2} f(x) g(x)$$

   où g est une fonction à préciser.
5. Faire une étude de g pour obtenir le signe de $f'(x)$.
6. Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure graphique de $\mathcal{C}_f$ à l'aide des réponses précédentes.

Exercice 3

On suppose qu'il existe un nombre complexe z sous la forme $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) tel que :

$$z^2 = 3 - 4i$$

1. Déterminer deux équations vérifiées par a et b.
2. En remarquant qu'on veut avoir $|z|^2 = |3 - 4i|$, en déduire une troisième équation vérifiée par a et b.
3. En déduire les valeurs possibles de a et b.

Exercice 4

On rappelle les formules d'Euler :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}} \qquad \boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \sin(\theta) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$$

On admet que le développement limité usuel de $\exp(h)$ *en* 0 *est valable si* h *est un* <u>*complexe*</u> *qui tend vers* 0.

1. Déterminer un DL à l'ordre 4 de $\cos(x)$ au voisinage de 0.
2. En déduire un équivalent de $1 - \cos(x)$ au voisinage de 0.
3. Déterminer un DL à l'ordre 4 de $\sin(x)$ au voisinage de 0.
4. En déduire un équivalent de $\sin(x)$ au voisinage de 0.
5. Calculer un DL à l'ordre 3 de $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ au voisinage de 0.

Exercice 5

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$$

Déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.