Le devoir comporte trois exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur une page. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$.

1. Déterminer D l'ensemble de définition de f, et préciser le signe de $f(x)$ en fonction de x.
2. Montrer que f se prolonge par continuité en 0. La fonction f ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?
3. Dresser le tableau de variations complet de f.
4. Montrer que f réalise une bijection de D sur un intervalle I à expliciter.
5. On note f^{-1} la fonction réciproque de f. Donner le tableau de variations complet de f^{-1}, et calculer $f^{-1}(1)$.
6. Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur I, et calculer $(f^{-1})'(1)$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour $x > 0$.
5. On considère φ l'application définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = (1 - \sqrt{x})e^{\sqrt{x}}$$

   (a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
   (b) Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et donner $\varphi'(0)$.
   (c) En déduire que : $\dfrac{e^{\sqrt{x}} - 1 - \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$.
   (d) En déduire la limite de $\dfrac{e^x - 1 - xe^x}{x^2}$ quand $x \to 0^+$
6. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et préciser $f'(0)$.
7. Déterminer le signe de f' sur $]0, +\infty[$.
   (*On pourra passer par l'étude de* $g : x \mapsto e^x - xe^x - 1$).
8. Dresser le tableau de variations de f en incluant les limites aux bornes.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xe^x$$

1. Pour tout entier n strictement positif, montrer que l'équation : « $f(x) = n$ » admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée u_n.
   Montrer également que cette solution est strictement positive.
2. Montrer que pour $n \geqslant 3$, $1 \leqslant u_n \leqslant \ln(n)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) + u_n = \ln(n)$
4. Justifier que :

$$\forall n \geqslant 3,\ 0 \leqslant \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} \leqslant \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$$

   En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1$$