Exercice 1

1. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que l'intégrale :
$$I = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt$$
converge.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que l'intégrale :
$$J_x = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}$$
converge.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+,\ 2\sqrt{xe^t} \leqslant x + e^t$, puis que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leqslant J_x \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Exercice 2

Soit H définie par :
$$H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2(1+t)} dt$$

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $H(x)$ est convergente.
2. Étudier les variations de H sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} H(t)dt$ converge et exprimer cette intégrale en fonction de $H(0)$.